

# 基于 Poincare 变换的滑动轴承非线性油膜力数据库方法

孟志强, 徐 华, 朱 均

(西安交通大学 润滑理论及轴承研究所, 陕西 西安 710049)

**摘要:** 运用状态空间 Poincare 变换使径向滑动轴承动力系统的部分状态变量由无限区间变换到有限区间, 在经过变换的状态空间中求解 Reynolds 方程, 建立了径向滑动轴承非线性油膜力数据库及相应的插值拟合程序, 实现了非线性油膜力的快速准确获得. 通过滑动轴承-转子系统运动瞬态分析和 Poincare 映射方法验证了数据库及拟合程序的精度.

**关键词:** 滑动轴承; 非线性油膜力; Poincare 变换; 数据库

**中图分类号:** TH133.3

**文章标识码:** A

**文章编号:** 1004-0595(2001)03-0223-05

滑动轴承-转子系统的线性化理论已成熟并广泛应用<sup>[1,2]</sup>, 然而滑动轴承油膜力往往呈现很强的非线性, 因此滑动轴承-转子系统非线性分析越来越受到重视. 滑动轴承非线性油膜力的计算是非线性分析的重要问题. 目前计算的方法主要有两类, 一类是采用有限元及差分法等数值计算方法直接求解 Reynolds 方程<sup>[3,4]</sup>, 另一类是解析法<sup>[5,6]</sup>, 采用无限长或无限短轴承模型. 前一类方法精度高, 但计算速度较慢; 而后一类方法计算及分析方便但精度低. 王文等<sup>[7]</sup>运用对 Reynolds 方程进行量纲分析的方法建立了油叶型径向滑动轴承非线性油膜力数据库, 为高效准确地计算非线性油膜力开辟了新途径. 预先通过计算得到同一类轴承在不同轴心位置及速度下的非线性油膜力, 按一定顺序存储在数表文件中形成油膜力数据库, 这样在计算非线性油膜力时只需在数据库中检索插值, 速度快且精度高. 本文作者运用状态空间 Poincare 变换, 建立了固定瓦径向滑动轴承的非线性油膜力数据库以及相应的插值计算程序, 并通过实际算例进行了验证, 从而从理论和实际应用上拓展了非线性油膜力数据库方法.

## 1 理论与方法

以有限宽圆弧瓦轴承为对象, 在等温情况下, 油膜压力分布由 Reynolds 方程决定. 其无量纲形式为:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(G_{\varphi} H^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi}) + (\frac{D}{L})^2 \frac{\partial}{\partial \lambda}(G_{\lambda} H^3 \frac{\partial p}{\partial \lambda}) = -3\epsilon(1-2\theta') \sin \varphi - 6\epsilon' \cos \varphi \quad (1)$$

边界条件为:

$$p(\theta, \lambda) = 0; \quad \frac{\partial p(\theta, \lambda)}{\partial \varphi} = 0; \quad (2)$$
$$p(\varphi, 1) = 0; \quad \frac{\partial p(\varphi, 0)}{\partial \lambda} = 0$$

式(1)中:  $G_{\varphi}$ 和 $G_{\lambda}$ 为紊流系数, 可由下式计算得到<sup>[8]</sup>:

$$G_{\varphi} = \frac{1}{12(1+0.00116R_h^{0.916})}$$
$$G_{\lambda} = \frac{1}{12(1+0.00120R_h^{0.854})} \quad (3)$$

其中:  $R_h$  为局部雷诺数,  $R_h = \frac{h\omega R \rho}{\mu}$ .

用  $\mu$  表示平均温度下的粘度, 令  $\xi = (1-2\theta')$ ,  $\eta = 2\epsilon'$ , 则式(1)可变为:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(G_{\varphi} H^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi}) + (\frac{D}{L})^2 \frac{\partial}{\partial \lambda}(G_{\lambda} H^3 \frac{\partial p}{\partial \lambda}) = -3\epsilon\xi \sin \varphi - 3\eta \cos \varphi \quad (4)$$

式中:  $\xi$  和  $\eta$  表示轴心速度扰动项, 是轴心运动状态空间的独立坐标, 非线性油膜力是  $\epsilon$  和  $\eta$  的非线性函数, 定义域内离散  $\epsilon$  和  $\eta$  并计算出各离散点上的油膜力, 存储到数表文件中可形成油膜力数据库. 但在理论上  $\xi, \eta$  ( , ), 很难确定其范围, 进行合理的离散, 并通过较少的计算得到有限数据的

基金项目: 国家自然科学基金重大项目资助(19990510).

收稿日期: 2000-05-08; 修回日期: 2000-08-07/联系人孟志强

作者简介: 孟志强, 男, 1970 年生, 博士研究生, 主要从事摩擦学和润滑理论及转子动力学研究



油膜力数据库 换言之, 如何用有限区间内的变量来取代无界变量是采用非线性油膜力数据库方法的关键

一般而言, 在平面系统中, 可用  $R^2$  平面与一半球面同胚来实现无限平面域向有限域的转变, 但进行具体计算时必须找到量化对应关系 由于球面的映射关系复杂, 因此希望找到平面与球面的对应关系, 为此我们采用了 Poincare 变换方法 如图 1 所示, 作  $R^3$  单

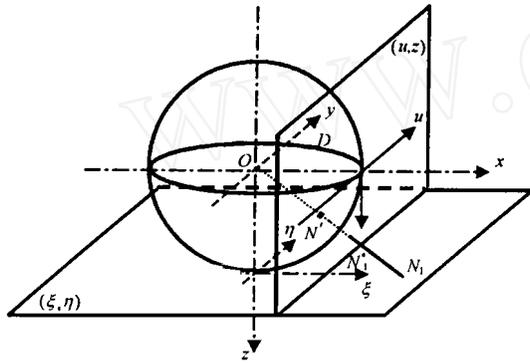


Fig 1 Homeomorphism of plane  $(\xi, \eta)$  and  $(u, v)$   
图 1 平面  $(\xi, \eta)$  与平面  $(u, v)$  的同胚示意图

位球面  $\sum: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 与相平面  $(\xi, \eta)$  相切于  $O_1(0, 0, 1)$ , 球心为  $O(0, 0, 0)$ ,  $x$  和  $y$  轴分别与  $\xi$  和  $\eta$  轴平行,  $z$  轴垂直向下, 连接球心与相点  $N(\xi, \eta)$  成一条直线并与下半球面相交于  $N'$ , 则相平面  $(\xi, \eta)$  上包括无穷远点在内的任一点都可与下半球面的 1 个点一一对应(同胚). 为了找到平面与平面的对应, 须进行二次变换, 作切平面  $(u, z)$  与球面相切于  $C(1, 0, 0)$ ,  $u$  坐标平行于  $y$  坐标 设平面  $(\xi, \eta)$  上的点  $N_1$  与球心  $O$  的连线  $ON_1$  与平面  $(u, z)$  交于  $N_1'$ .  $N_1'$  和  $N_1$  在  $O, x, y, z$  坐标系中的坐标分别为  $N_1'(1, u, z), N_1(\xi, \eta, 1)$ , 此 2 点分别与平面  $(u, z)$  和  $(\xi, \eta)$  上的坐标系的坐标相对应  $O, N_1, N_1'$  在一条直线上, 而  $O$  为原点, 则:

$$\frac{1}{\xi} = \frac{u}{\eta} = z. \tag{5}$$

$(u, z)$  和  $(\xi, \eta)$  坐标间的关系为:

$$\xi = \frac{1}{z}, \eta = \frac{u}{z}; \text{ 或 } u = \frac{\eta}{\xi}, z = \frac{1}{\xi}. \tag{6}$$

经过上述变换, 平面  $(\xi, \eta)$  上的无穷远点可映射到  $u$  坐标的  $(-1, 1)$  有限范围内 但  $\eta$  轴及邻近区域上的点却无法映射到  $(u, z)$  平面的有限区域内, 因此有必要将  $(\xi, \eta)$  平面分为 2 个区域, 即  $|\xi| > |\eta|$  和  $|\xi| < |\eta|$ , 再分别进行二次变换

对于平面区域  $|\xi| > |\eta|$  内  $\xi > 0, \eta > 0$  的点可通

过式(6)映射到  $(u, z)$  平面上

同理, 可把相平面  $(\xi, \eta)$  上区域  $|\xi| < |\eta|$  内  $\xi > 0, \eta > 0$  的点映射到与  $Oxyz$  坐标点  $D(0, 1, 0)$  相切的平面  $(v, z)$  上, 其中  $v$  坐标与  $x$  坐标平行

类似地可得对应关系为:

$$\xi = \frac{v}{z}, \eta = \frac{1}{z}; \text{ 或 } v = \frac{\xi}{\eta}, z = \frac{1}{\eta} \tag{7}$$

当  $|\xi| > |\eta|$  时, 将式(4)经过式(6)变换以后可写为:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial \rho}{\partial \rho}) + (\frac{D}{L})^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}) = -3 \frac{\epsilon}{z} \sin \varphi - 3 \frac{\mu}{z} \cos \varphi. \tag{8}$$

将式(8)两边同乘以  $|z|$ , 并令  $W = P|z|$ , 则式(8)变换为:

当  $z > 0$  时:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial W}{\partial \rho}) + (\frac{D}{L})^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda}) = -3 \epsilon \sin \varphi - 3 \mu \cos \varphi. \tag{9}$$

当  $z < 0$  时:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial W}{\partial \rho}) + (\frac{D}{L})^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda}) = 3 \epsilon \sin \varphi - 3 \mu \cos \varphi. \tag{10}$$

边界条件为:

$$W(\theta, \lambda) = 0, \frac{\partial W(\theta, \lambda)}{\partial \rho} = 0; \\ W(\varphi, 1) = 0, \frac{\partial W(\varphi, 1)}{\partial \lambda} = 0 \tag{11}$$

这样变量  $z$  得以消去, 且边界条件保持了原有形式

当  $|\xi| < |\eta|$  时, 经过变换式(7), 式(4)可变换为:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial \rho}{\partial \rho}) + (\frac{D}{L})^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}) = -3 \epsilon \frac{v}{z} \sin \varphi - 3 \frac{1}{z} \cos \varphi. \tag{12}$$

仍令  $W = P|z|$ , 将方程两边同乘  $|z|$ , 得到:

当  $z > 0$  时:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial W}{\partial \rho}) + (\frac{D}{L})^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda}) = -3 \epsilon v \sin \varphi - 3 \cos \varphi. \tag{13}$$

当  $z < 0$  时:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial W}{\partial \rho}) + (\frac{D}{L})^2 \frac{\partial}{\partial \lambda} (G \mathcal{H}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda}) = 3 \epsilon v \sin \varphi - 3 \cos \varphi. \tag{14}$$

其中: 边界条件同式(11).

式(8~14)中:  $u, v \in (-1, 1)$ , 所以通过 Poincare 变换, 可以解决速度扰动项无法离散的问题 当求解式

(9, 10, 13 和 14) 得到  $W$  分布后, 通过轴心运动状态变量即可求得非线性油膜力 相应的公式为:

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{1}{|z|} \frac{\eta^{2-1}}{\eta_1^{1-1}} - W \cos \varphi r d r d \lambda \\ F_t &= \frac{1}{|z|} \frac{\eta^{2-1}}{\eta_1^{1-1}} - W \sin \varphi r d r d \lambda \\ z &= \frac{1}{\xi} = \frac{1}{1-2\theta}, \quad (|\xi| > |\eta|); \\ z &= \frac{1}{\eta} = \frac{1}{2\epsilon}, \quad (|\xi| < |\eta|). \end{aligned} \quad (15)$$

式中:  $F_r$  和  $F_t$  分别为法向力和切向力

另外, 当  $\xi = 0, \eta = 0$  时, 无法进行 Poincare 变换, 注意到式(4)这时为齐次方程, 根据边界条件(2)可得到特解  $P(\varphi, \lambda) = 0$ , 此时  $F_r = 0, F_t = 0$

这样通过对状态空间进行 Poincare 变换, 就解决了  $\xi$  和  $\eta$  变量无法离散化的问题, 使建立油膜力数据库以及通过轴心运动状态变量来拟合油膜力表达式成为可能 与文献[7]相比, 本文将非线性油膜力的定义域中速度扰动项作为状态空间的独立坐标进行变换, 这种变换不依赖于 Reynolds 方程, 因此更具有一般性

根据以上原理, 我们以单瓦块为基础, 采用 8 节点等参元的有限元方法进行计算, 建立了油膜力数据库 如图 2 所示, 以瓦块起始角  $OFAI$ , 偏心率  $E$  以及

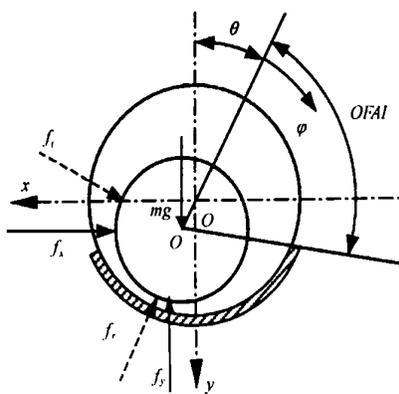


Fig 2 Rigid rotor-bearing system configuration

图 2 刚性转子膜型

变换后的坐标  $u$  (或  $v$ ) 作为变量, 对固定瓦偏位角  $\theta$  与  $OFAI$  之和为常数,  $OFAI$  既表示了偏位角  $\theta$  又是瓦块的几何参数 合理离散  $OFAI, E$  和  $u(v)$  这 3 个变量, 代入式(9, 10, 13 和 14) 求出  $W$  在单瓦块的分布, 再得到式(15)中积分部分的值, 将所得结果存入数据文件中, 可形成单瓦块油膜力数据库 对圆柱轴承或椭圆轴承, 以数据库为基础, 根据轴心运动状态参数利用分段 3 点插值拟合公式得到各瓦的油膜力,

再叠加得到整个轴承的非线性油膜力 这样对于一定长径比及瓦包角运行在 1 个转速下的滑动轴承, 只需先建立 1 个数据库, 再通过插值拟合程序从数据库中 得到非线性油膜力, 其计算速度比有限元法直接计算大大提高 根据实际测算, 计算效率可提高 200 倍以上

## 2 数据验证

以滑动轴承支承刚性转子不平衡响应为例, 模型如图 2 所示 图 2 中  $f_x$  和  $f_y$  分别为作用在轴颈上的油膜力分量,  $\theta$  为轴承偏位角,  $O$  为轴承几何中心,  $O_j$  为轴颈几何中心,  $g$  为重力加速度

不平衡刚性转子运动方程为:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -f_x + m e \omega^2 \sin \omega t, \\ m \ddot{y} &= -f_y + m e \omega^2 \cos \omega t + m g. \end{aligned} \quad (16)$$

式中:  $e$  为质量偏心距

采用通常的无量纲变换, 无量纲位移分量  $X = x/c, Y = y/c, c$  为轴承侧隙 无量纲油膜力分量  $F_x = (f_x \Psi^2)/(\mu \omega L r), F_y = (f_y \Psi^2)/(\mu \omega L r)$ , 无量纲质量  $M = (m c \omega \Psi^2)/(\mu L r), G = g/(c \omega^2)$ , 无量纲不平衡偏心距  $\rho = e/c$ , 无量纲时间  $\tau = \omega t, \omega$  为转速,  $L$  和  $r$  分别为轴承的宽度和半径 取  $Z_1 = X, Z_2 = Y, Z_3 = X', Z_4 = Y'$ , 其中“'”表示  $\frac{d}{d\tau}$  这样式(16)用状态变量表示的无量纲形式为:

$$\begin{aligned} Z_1' &= Z_3, \quad Z_2' = Z_4, \\ Z_3' &= -\frac{E_x}{M} + \rho \sin \tau, \quad Z_4' = -\frac{E_y}{M} + \rho \cos \tau + G. \end{aligned} \quad (17)$$

所选轴承参数分别为: 轴颈直径  $D = 0.36$  m, 轴承宽度  $B = 0.288$  m, 间隙比  $\Psi = 0.263\%$ , 瓦张角  $\alpha = 150^\circ$ , 椭圆度  $en = 0.505$ , 轴转速  $n = 3000$  r/min, 轴承的静载荷  $N = 196009$  N, 润滑油的粘度  $\mu = 0.01802$  N · s/m<sup>2</sup>, 不平衡偏心率  $\epsilon = 0.2$

用龙格库塔法解式(17), 初值取:  $Z_1 = 0.505, Z_2 = 0.15, Z_3 = 0, Z_4 = 0$  图 3 所示为用油膜力数据库及用有限元法直接求解油膜力  $F_x$  和  $F_y$  得到的轴心轨迹 可见两者的轴心轨迹几乎完全相同 图 4 所示为状态空间  $(Z_3, Z_4)$  截面上的相轨线 从图(3 和 4) 可见, 2 种计算所得的解在整个状态空间都是一致的

为了对数据库的精度进行量化考察, 我们采用 Poincare 映射法 式(17)可表示为:

$$\frac{dZ}{d\tau} = F(\tau, Z), \quad (\tau, Z) \in (R \times R^4). \quad (18)$$

以无量纲时间  $\tau = 0$  作 Poincare 截面, 式(18)的周期解穿越 Poincare 截面形成离散的状态点映射系

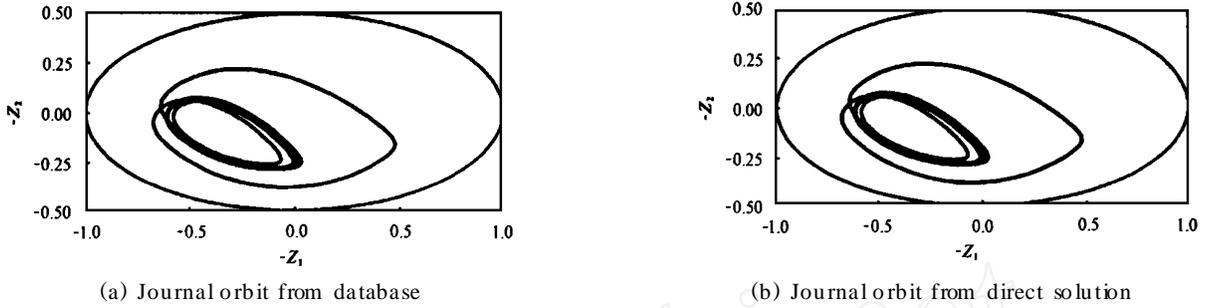


Fig 3 Comparison of journal orbits with two methods  
图 3 两种计算方法得到的轴心轨迹

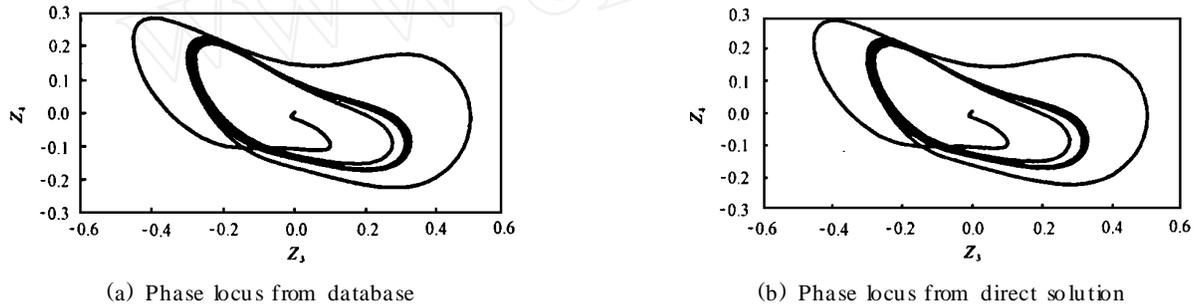


Fig 4 Comparison of phase locus with two methods  
图 4 两种计算方法得到的 Z3Z4 截面的相轨线

统, 可表示为:

$$Z^{(K+1)} = P(Z^{(K)}) \quad (19)$$

式中:  $P$  为 Poincare 映射算子. 表(1 和 2) 分别列出

表 1 用数据库计算得到的 Poincare 映射点列

Table 1 Poincare points from database

$K$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$
0	0.505000	0.150000	0.000000	0.000000
1	-0.309502	-0.003679	-0.399297	0.280769
13	0.205700	0.030992	-0.282731	0.191753
14	0.205652	0.031009	-0.282733	0.191771
27	0.203816	0.032370	-0.282218	0.192598
28	0.203544	0.032564	-0.282152	0.192721
29	0.203275	0.032758	-0.282093	0.192843

表 2 有限元法直接计算油膜力得到的 Poincare 映射点列

Table 2 Poincare points from direct solution

$K$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$
0	0.505000	0.150000	0.000000	0.000000
1	-0.309102	-0.003013	-0.400478	0.282702
13	0.206979	0.031193	-0.283156	0.193313
14	0.206923	0.031208	-0.283162	0.193334
27	0.205121	0.032627	-0.282629	0.194175
28	0.204831	0.032819	-0.282569	0.194304
29	0.204547	0.033016	-0.282509	0.194432

了采用以上 2 种方法计算得到的周期解穿越

Poincare 截面上的映射点列

令  $\|Z\| = \sum_{i=1}^4 |Z_i| = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| + |Z_4|$ , 对比 2 种情况下第 29 个映射点的  $\|Z\|$  值. 用数据库计算时  $\|Z\|_1 = 0.710969$ , 直接计算得到的  $\|Z\|_2 = 0.714504$ . 总的相对计算误差为  $R_1 = \frac{|\|Z\|_1 - \|Z\|_2|}{\|Z\|_2} = 0.49\%$ . 考虑到在积分过程中误差的不断积累, 以上误差是多部积分后的积累值, 可见本文所建立的数据库具有良好的精度.

### 3 结论

运用状态空间 Poincare 变换, 建立了径向滑动轴承非线性油膜力数据库. 分析表明其具有很高的精度, 可大大提高油膜力计算速度. 该数据库可应用于多支承的复杂轴承-转子系统, 对大型汽轮机组的非线性动力学分析具有实际意义.

### 参考文献:

[1] 王凤才, 袁小阳, 朱均. 变阶梯结构自适应径向滑动轴承的研究[J]. 摩擦学学报, 2000, 20(3): 197-201.  
[2] 彭超英, 朱均, 陈瑞琪. 弹性支承滑动轴承系统的上稳定性理论及应用[J]. 摩擦学学报, 1999, 19(1): 66-71.  
[3] Earles L L, Palazzo A B, Amentrout R W. A Finite

- Element Approach to Pad Flexibility Effects in Tilt pad Journal Bearings: Parts I and II [J]. ASME Journal of Tribology, 1990, 112(2): 169-182
- [4] Gadangi R K, Palazzo A B, Kim J. Transient Analysis of Plain and Tilt Pad Journal Bearings Including Fluid Film Temperature Effects[J]. ASME Journal of Tribology, 1996, 118(3): 423-430
- [5] Poore A B. On the Theory and Application of the Hopf-Friedrichs Bifurcation Theory [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1976, 60: 371-392
- [6] Myers C J. Bifurcation Theory Applied to Oil Whirl in Plain Cylindrical Journal Bearings[J]. ASME Journal of Mechanics, 1984, 51 (2): 244-250
- [7] Wang Wen, Zhang Zhiming. Calculation of journal dynamic locus aided by database of non-stationary oil film force of single bush segment [C]. Asia-Pacific Vibration Conference'93, Japan, 1993. 365-369
- [8] Mikami M, Kumagai M, Uno S. Static and Dynamic Characteristics of Rolling-Pad Journal Bearings in Super-Laminar Flow Regime [J]. ASME Journal of Tribology, 1988, 112(1): 73-79

## A Database Method of Nonlinear Oil Film Force Based on Poincare Transformation

MENG Zhi-qiang, XU Hua, ZHU Jun

(Theory of Lubrication and Bearing Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** A database method to get nonlinear oil film force of the finite width hydrodynamic journal bearings is presented. Thus some state variables are transformed from infinite to finite by using Poincare transformation and a nonlinear oil film force database of hydrodynamic bearings is established in the transformed phase space by solving Reynolds equation. The nonlinear oil film force with respect to state variables can be obtained from the database in a shorted time. The accuracy of the database is testified using time transient analysis of practical journal bearing and Poincare mapping method.

**Key words:** hydrodynamic bearing; nonlinear oil film force; Poincare transformation; database