

# 摩擦学学报

TRIBOLOGY



## 界面速度与温度滑移对有限长线接触纯滑动热弹流接触的影响

张明宇, 王静

### Effects of Interfacial Velocity or Temperature Slips on Finite Line Contact Thermal EHL in Simple Sliding Motion

ZHANG Mingyu, WANG Jing

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16078/j.tribology.2023110>

#### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

##### 基于Circular模型的大剪应变率点接触弹流界面滑移数值分析

Numerical Analysis of EHL Boundary Slip Effect Applying Circular Model under Big Shear Strain Rate

摩擦学学报. 2018, 38(2): 129 <https://doi.org/10.16078/j.tribology.2018.02.002>

##### 有限长滚子黏滑接触分析

Contact and Stick Slip of Finite Length Roller

摩擦学学报. 2019, 39(1): 57 <https://doi.org/10.16078/j.tribology.2018010>

##### 热变形求解及其对高速点接触弹流润滑影响研究

Solution of Thermal Deformation and Its Effects on High-Speed Point-Contact Elastohydrodynamic Lubrication

摩擦学学报. 2021, 41(5): 680 <https://doi.org/10.16078/j.tribology.2020087>

##### 牵引模式下球环点接触高速弹流润滑行为机理分析

Analysis for Mechanism of EHL Behavior at High Speeds in Ball-on-Ring Contacts in Tractive Rolling Mode

摩擦学学报. 2018, 38(6): 619 <https://doi.org/10.16078/j.tribology.2018055>

##### 考虑热弹性变形的角接触球轴承微观热弹流分析

Micro Thermal Elastohydrodynamic Lubrication Analysis of Angular Contact Ball Bearing Considering Thermal Elastic Deformation

摩擦学学报. 2018, 38(3): 299 <https://doi.org/10.16078/j.tribology.2018.03.007>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

张明宇, 王静. 界面速度与温度滑移对有限长线接触纯滑动热弹流接触的影响[J]. 摩擦学学报(中英文), 2024, 44(8): 1092–1106. ZHANG Mingyu, WANG Jing. Effects of Interfacial Velocity or Temperature Slips on Finite Line Contact Thermal EHL in Simple Sliding Motion[J]. Tribology, 2024, 44(8): 1092–1106. DOI: [10.16078/j.tribology.2023110](https://doi.org/10.16078/j.tribology.2023110)

## 界面速度与温度滑移对有限长线 接触纯滑动热弹流接触的影响

张明宇, 王静\*

(东华大学机械工程学院, 上海 201620)

**摘要:** 随着表面工程技术的发展, 润滑界面发生滑移的现象已比较常见. 除了发生界面速度滑移, 在有显著温升的弹流接触界面也有可能发生温度滑移. 本研究在有限长线接触纯滑动热弹流润滑问题的基础上, 建立了4种界面滑移模型, 采用数值分析方法, 揭示了在运动和静止表面分别发生速度和温度滑移时接触区润滑特性的变化. 研究发现, 运动表面的速度滑移会阻碍接触区的润滑油流动, 而静止表面的速度滑移则促进润滑油流动; 运动表面的温度滑移会降低接触区内的温升, 静止表面的温度滑移则会显著增加接触区的温升并降低摩擦系数. 速度和温度滑移都可能将摩擦系数降到0.01以下, 实现超滑, 但静止表面的温度滑移对摩擦系数的影响更为显著.

**关键词:** 速度滑移; 温度滑移; 热弹流润滑; 有限长线接触; 数值分析; 超滑

中图分类号: TH117.2

文献标志码: A

文章编号: 1004-0595(2024)08-1092-15

## Effects of Interfacial Velocity or Temperature Slips on Finite Line Contact Thermal EHL in Simple Sliding Motion

ZHANG Mingyu, WANG Jing\*

(College of Mechanical Engineering, Donghua University, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** With the development of surface engineering technology, plenty of hydrophobic and oleophobic surfaces are designed so that the occurrence of interfacial slips has become quite common. For an interface in elastohydrodynamic lubrication (EHL) contact with obvious thermal rise, temperature slip should take place accompanying with the occurrence of velocity slip. Thus, for a thermal EHL contact, friction coefficient is possible to drop below 0.01 and reach a superlubricity level.

In this study, based on a finite line contact simple sliding thermal EHL problem, numerical analyses were completed to reveal the changes in the lubrication characteristics when velocity or temperature slip occurred on the moving and stationary surfaces, respectively, together with the influence of velocity change on lubrication state in the contact zone. The work was also aimed to explore the reduction of the friction coefficient as well as the possible occurrence of superlubricity.

The geometrical modeling of the finite line contact was based on the authors' previous design of the roller ends to obtain a beneficial lubrication state at the end of the contact zone that was least susceptible to severe stress concentration

Received 15 June 2023, revised 25 August 2023, accepted 28 August 2023, available online 3 April 2024.

\*Corresponding author. E-mail: [jingwang@dhu.edu.cn](mailto:jingwang@dhu.edu.cn), Tel: +86-18669723895.

This project was supported by National Natural Science Foundation of China (51875298), Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2019MEE040), the Fundamental Research Funds for the Central Universities and Donghua University Graduate Innovation Fund Project (CUSF-DH-D-2023033).

国家自然科学基金项目(51875298)、山东省自然科学基金项目(ZR2019MEE040)和中央高校基本科研业务费专项资金、东华大学研究生创新基金项目(CUSF-DH-D-2023033)资助.

phenomena. The modified generalized Reynolds equation taking into account the interfacial velocity slip, the Ree-Eyring fluid flow model and respectively 4 types of interfacial slip models were used to establish the mathematical models. The Reynolds equation was solved by the multigrid method, the elastic deformation by the multigrid integration method, and the temperature field by the column-column scanning technique.

Velocity slip at the moving surface significantly reduced the lubricant flow rate in the contact zone, while velocity slip at the stationary surface acted the opposite way. All 4 slip models reduced the oil film thickness while the effect of the velocity slip on the moving surface was the most obvious. Velocity and temperature slips on the moving surface and velocity slip on the stationary surface all reduced the maximum thermal rise in the contact area, but temperature slip on the stationary surfaces significantly increased the maximum thermal rise. Velocity slip on both the moving and the stationary surfaces could reduce the friction coefficient to below 0.01 thus a superlubricity level was reached under low-medium speed conditions, or if the velocity slip length was long enough. Moreover, temperature slip on the stationary surface could smoothly reduce the friction coefficient to reach a superlubricity level.

Velocity slip on the moving surface significantly reduced the film thickness in the contact zone, and temperature slip on the moving surface led to an increase in the friction coefficient in the contact zone, so it was suggested to avoid interfacial slip on moving surface. Velocity slip on the stationary surface played a major role under low speed condition while temperature slip on the stationary surface was dominating under high speed condition, thus the friction coefficient could be reduced with the aid of interfacial slip on the stationary surface.

**Key words:** velocity slip; temperature slip; thermal EHL; finite line contact; numerical analyses; superlubricity

在试验中, 摩擦系数低于0.01被定义为超滑<sup>[1]</sup>, 当前超滑主要依靠二维结构的固体润滑剂的层间滑移来实现<sup>[2-4]</sup>, 即利用固-固界面滑移实现超滑. 与固体润滑剂相比, 液体润滑剂拥有更加广泛的应用范围, 现阶段流体润滑条件下往往需要依靠离子液体<sup>[5-6]</sup>或酸性液体<sup>[7-8]</sup>实现超滑. 随着表面工程技术的发展, 大量疏水疏油的表面被设计出来<sup>[9-12]</sup>. 在这种背景下, 弹流接触区摩擦系数降低到0.01以下即实现超滑是有可能发生的, 研究弹流润滑接触区中超滑现象的发生具有重要的科学和应用意义.

润滑接触中的界面滑移一般指速度滑移, 即在固-液界面与固体相邻液体层的流速与固体的速度存在差异. 在传统的流体力学和摩擦学研究中, 连续界面假设是默认的, 它描述了润滑剂和相邻固体在界面处的速度和温度的连续性. 如图1(a)所示, 其中固体a速度为 $u_a$ , 固体b速度为 $u_b$ ,  $u$ 为润滑剂的速度, 润滑剂最顶层的速度和 $u_a$ 相同, 润滑剂最底层的速度与 $u_b$ 相同. Prony<sup>[13]</sup>和Girard<sup>[14]</sup>曾提出黏滞层边界条件, 认为流体层中存在1层黏滞层, 流体整体与界面间不存在相对滑动, 但是流体的本体与黏滞层之间存在速度滑移. Navier<sup>[15]</sup>提出了线性滑移边界模型, 如图1(b)所示, 其中 $\left. \frac{du}{dz} \right|_{\text{wall}}$ 为与固体相邻流体的速度梯度,  $u_s$ 为固体与相邻流体的速度差,  $l$ 为滑移长度, 该模型中 $u_s$ 与 $l$ 成正比. 此后, 牛顿流体<sup>[16]</sup>、极限剪应力<sup>[17]</sup>、膜厚和摩擦力<sup>[18]</sup>等影响因素逐渐被考虑到模型之中. 为了更好地解释高速条件下油膜厚度的变化, Zhang等<sup>[19-20]</sup>推导了考虑

界面速度滑移的修正雷诺方程, 并使用润滑剂的极限剪切应力作为滑移发生的判据, 认为界面速度滑移和热效应共同影响了高速滚滑条件下油膜特性, 指出速度滑移会改变接触区的速度分布, 并导致温度上升. 从传热的角度, Nagayama等<sup>[21]</sup>指出, 若出现速度滑移, 界面间也必定存在温度滑移, 如图1(c)所示, 其中 $u_0$ 为固体运动速度,  $l_s$ 为速度滑移长度,  $l_k$ 为温度滑移长度,  $u_s$ 为固体与相邻流体的速度差,  $T_{\text{jump}}$ 为固体与相邻流体的温度差. 陈宏耀<sup>[22]</sup>在Yang和Wen所推导的广义雷诺方程<sup>[23]</sup>的基础上, 推导了考虑界面速度滑移的广义雷诺方程并初步研究了纯滑动点接触条件下温度滑移的影响. Meng等<sup>[24-25]</sup>使用Navier模型, 在陈宏耀<sup>[22]</sup>工作的基础上, 研究了纯滚动和零卷吸条件下同时考虑界面速度和温度滑移对点接触油膜润滑状态的影响, 但并未给出摩擦系数的变化.

界面速度滑移的发生已经得到了试验的佐证. 2009年, Guo等<sup>[26]</sup>在光学弹流润滑试验装置中, 通过钢球撞击玻璃盘上油膜的形状来判断发生了界面速度滑移. Wong等<sup>[27]</sup>通过采用疏油防指纹涂层, 在零卷吸接触条件下实现了界面滑移并设计了新型无保持架轴承. 栗心明等<sup>[28]</sup>针对高压弹流油膜界面滑移长度无法量化且各参数对滑移影响尚不清晰的现状, 定义了通用滑移长度公式, 量化了滑移程度并分析了各种因素对滑移长度的影响. 葛翔宇等<sup>[29]</sup>认为氧化石墨烯吸附膜可以将固体粗糙峰的碰撞转变为石墨烯层间的低剪切滑移, 从而降低摩擦实现超滑, 以上研究都是针对点接触工况完成的.

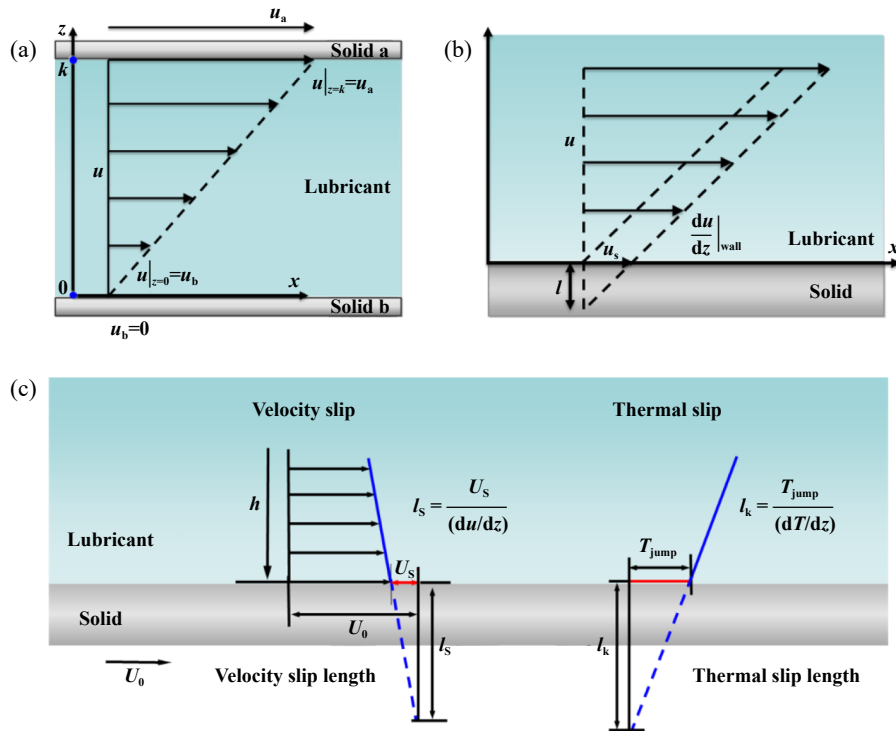


Fig. 1 Interface continuity and interfacial slip models

图 1 界面连续模型及滑移模型

有限长线接触是一种常见的接触形式,存在于滚子轴承<sup>[30]</sup>、凸轮-挺杆<sup>[31]</sup>、齿轮传动<sup>[32]</sup>及链传动<sup>[33-36]</sup>中.作者采用数值分析方法,研究了链传动中套筒和销轴之间的尺寸效应<sup>[33]</sup>、修形问题<sup>[34]</sup>以及乏油工况<sup>[35]</sup>的影响.张安生等<sup>[36]</sup>试验探究了有限长线接触中尺寸效应的影响.如前所述,若固-液界面存在速度不连续,则一定会导致界面的温度不连续<sup>[21]</sup>,也就是发生了温度滑移.理论上温度滑移不会单独发生,它是伴随着速度滑移发生.考虑到热效应对于降低摩擦系数的影响,温度滑移的发生也可能对摩擦系数的变化有所影响.若摩擦系数降至0.01以下,将实现超滑.因此,为了解温度滑移的影响,本研究将针对有限长线接触纯滑动热弹润滑问题,分别考虑界面运动和静止表面的速度或温度滑移,建立4种界面滑移模型,探讨接触区润滑状态的变化规律,研究摩擦系数的变化以及超滑的发生可能.

## 1 数学模型和数值方法

### 1.1 数学模型

有限长线接触问题的三维模型如图2(a)所示,其中无限大固体平面a沿x方向以 $u_a$ 匀速运动,半径为 $r$ 的固体滚子b静止不动,其母线长度为 $l_0$ ,端部圆角区域长度为 $y_{sk}$ ,修形圆角半径为 $r_{end}$ .接触区受到的载荷为 $w$ .使用有限长线接触热弹流润滑模型进行数值计算,为

得到接触区端部最不容易出现严重应力集中现象的有益润滑状态,作者对滚子端部进行了修形设计<sup>[34]</sup>.使用得到的最佳方案,计算所得接触区压力( $P$ )、膜厚( $h$ )和最大温升( $T$ )的分布分别如图2(b~d)所示<sup>[34]</sup>,其中接触区最大压力为 $p_{max}$ ,最小膜厚为 $h_{min}$ ,中心膜厚为 $h_{cen}$ ,最大温升为 $T_{max}$ ; $Y=0$ 截面上的最大压力为 $p_{max1}$ ,最大温升为 $T_{max1}$ .图2中 $p_{max}$ 、 $h_{min}$ 和 $T_{max}$ 都出现在接触区的端部但变化较为平缓,与端部相比,接触区中截面的润滑状态较好.

假设在固体和润滑剂之间存在理论上的滑移层,其实际厚度为 $o$ ,其理论厚度就是滑移长度.假设在运动表面b和静止表面上a分别发生速度滑移和温度滑移,则界面滑移示意图如图3所示.根据Navier模型<sup>[15]</sup>,假设界面a速度滑移的长度为 $l_{sa}$ ,界面b速度滑移的长度为 $l_{sb}$ .根据Nagayama<sup>[21]</sup>的温度滑移理论,假设界面a温度滑移的长度为 $l_{Ta}$ ,界面b温度滑移的长度为 $l_{Tb}$ .在固体a和b速度不变的情况下,滑移长度的变化会直接影响润滑剂的流速和温度.由此可得界面速度连续方程和界面热连续方程分别如下:

$$\begin{cases} u_{z=o'} = u_a + l_{sa} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=o'} \\ u_{z=h'} = u_b - l_{sb} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h'} \end{cases} \quad (1)$$



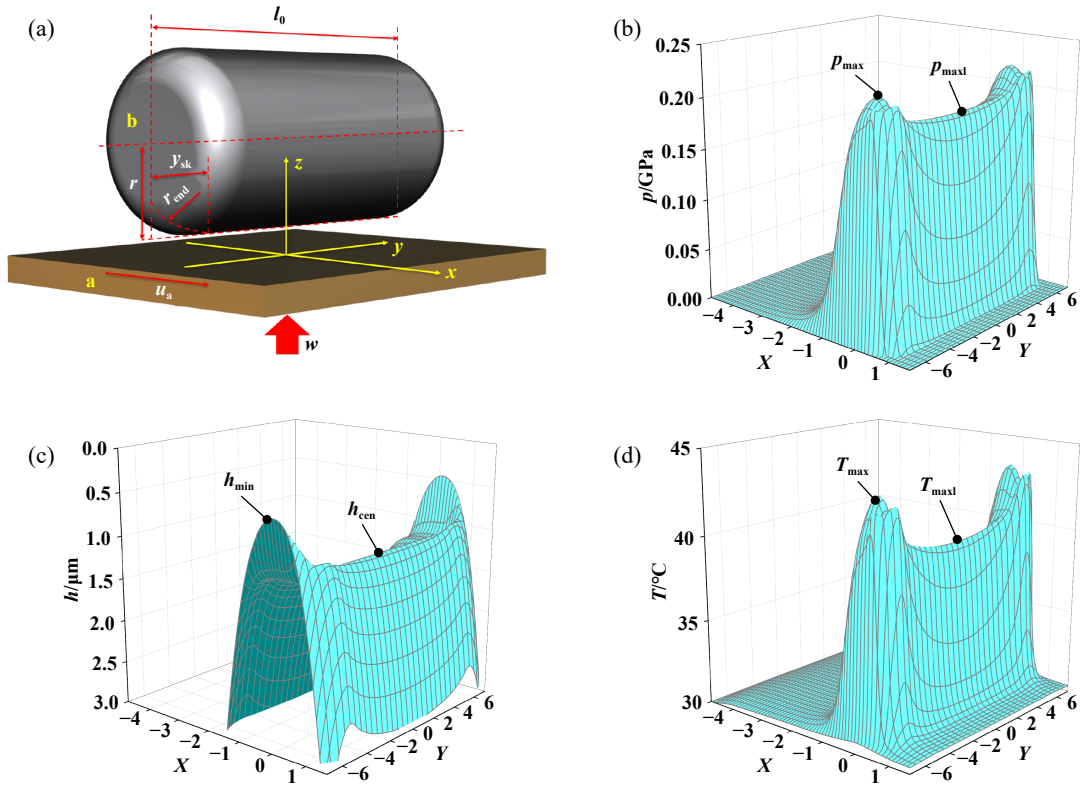


Fig. 2 Finite line contact model and its characteristics of oil film<sup>[34]</sup>

图 2 有限长线接触模型及其油膜特征<sup>[34]</sup>

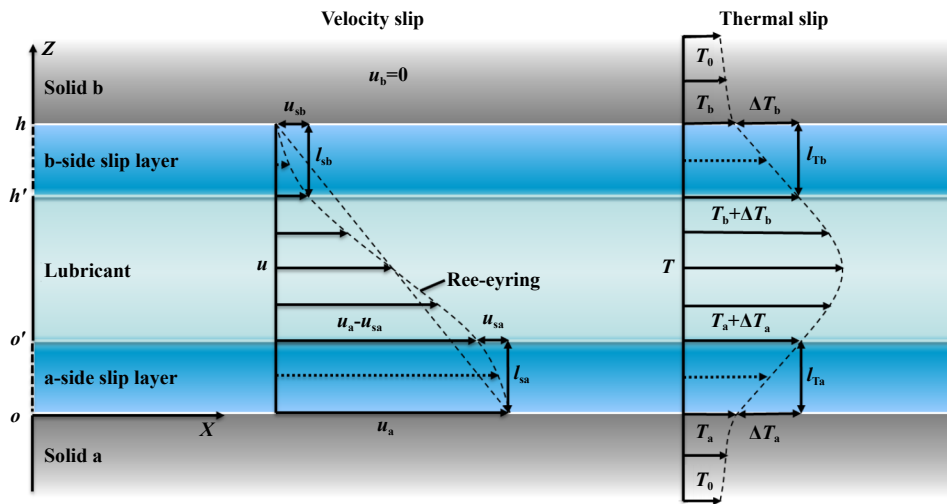


Fig. 3 Schematic diagram of velocity and thermal slip under simple sliding condition

图 3 纯滑动速度滑移和温度滑移示意图

$$\begin{cases} T_{z=o'} = T_a|_{z=o} + l_{Ta} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=o'} \\ T_{z=h'} = T_b|_{z=h} - l_{Tb} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h'} \end{cases} \quad (2)$$

使用Ree-Eyring 流体模型, 其本构方程<sup>[37]</sup>为

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_0}{\eta} \sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \quad (3)$$

式中,  $\tau_0$ 代表Ree-Eyring流体的特征剪应力,  $\eta$ 代表Ree-Eyring流体的表观黏度。

考虑速度滑移的广义Reynolds方程<sup>[22]</sup>为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{ex} h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\rho}{\eta} \right)_{ey} h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right] = 12u_c \frac{\partial(\rho^* h)}{\partial x} \quad (4)$$

式中,  $p$ 为压力,  $h$ 为膜厚,  $\rho$ 为密度。

$$u_e = \frac{u_a + u_b}{2}$$

$$\left(\frac{\rho}{\eta}\right)_{ex} = 12 \left[ l_{sa} \frac{B \rho_c}{A h^2} + \frac{B \eta_{z=0}}{A h} \rho'_c - \rho''_c \right]$$

$$\left(\frac{\rho}{\eta}\right)_{ey} = 12 \left[ \eta_e \frac{\rho'_c}{\eta'_e} - \rho''_c \right]$$

$$A = h \eta_{z=h} \eta_{z=0} + l_{sa} \eta_e \eta_{z=h} - l_{sb} \eta_e \eta_{z=0}$$

$$B = h^2 \eta_{z=h} \frac{\eta_e}{\eta'_e} - h l_{sb} \eta_e$$

$$\rho^* = \frac{1}{u_e} \left[ u_a \rho_c + (u_b - u_a) \frac{\eta_e \eta_{z=h}}{A} (l_{sa} \rho_c + h \rho'_c \eta_{z=0}) \right]$$

对剪应力进行积分, 可得接触区的牵拽力

$$F = \iint \tau dx dy \quad (5)$$

接触区的摩擦系数等于两界面摩擦系数的平均数

$$f = \frac{F|_{z=0} + F|_{z=h}}{2w} \quad (6)$$

计算过程中用到的膜厚方程、能量方程、黏温-黏压方程、密温-密压方程、载荷方程及相关边界条件见文献[34].

## 1.2 数值方法

数值分析在方程无量纲化的基础上进行, 本文中提及的各无量纲量定义<sup>[34]</sup>如下:

$$W = w/(2E' r l), \quad U_0 = \eta_0 u_0/(E' r),$$

$$G = \alpha E', \quad P = p/p_H, \quad \bar{\eta} = \eta/\eta_0,$$

$$\bar{\rho} = \rho/\rho_0, \quad X = x/b, \quad Y = y/b, \quad L = l/b, \quad U = u/u_e,$$

$$Z = z/b, \quad T = t/t_0, \quad \bar{\rho}^* = \rho^*/b$$

式中, 赫兹接触半宽  $b = r \sqrt{8W/\pi}$ , 最大赫兹接触应力  $p_H = E'b/r$ .

油膜压力采用多重网格法<sup>[38]</sup>求解, 弹性变形项用多重网格积分法<sup>[38]</sup>求解.  $X$ 方向的无量纲计算域为-4.8~1.6;  $Y$ 方向上的无量纲计算域为-7.2~7.2. 计算过程中使用的参数列于表1中.

为了进一步证实数据的网格无关性, 在  $l_{sa} = 0.5 \mu\text{m}$  条件下, 综合比较了3层网格(顶层节点64×256)、4层网格(顶层节点128×512)和5层网格(顶层节点256×1024)的计算结果, 其结果列于表2中. 其中压力、膜厚和温升的误差均小于5%, 摩擦系数的误差小于9.2%, 说明网格密度对计算结果的影响不大.

为了兼顾计算效率和精度, 本文中采用4层网格结构, 在最稠密的网格层的 $X$ 方向上设置128个节点,

表1 输入参数

Table 1 Input parameters

Parameters	Specifications
Maximum Hertzian pressures, $p_H$	0.2 GPa
Velocity of solid a, $u_a$	2 m/s
Velocity of solid b, $u_b$	0 m/s
Effective Young's modulus, $E'$	$2.26 \times 10^{11}$ Pa
Ambient temperature, $T_0$	303 K
Ambient viscosity of oil, $\eta_0$	0.08 Pa·s
Ambient density of oil, $\rho_0$	875 kg/m <sup>3</sup>
Specific heat of oil, $c_f$	2 kJ/(kg·K)
Heat conductivity of oil, $k_f$	0.14 W/(m·K)
Pressure-viscosity coefficient, $\alpha$	$2.19 \times 10^{-8}$ Pa <sup>-1</sup>
Viscosity-temperature coefficient, $\beta$	$0.047$ 6 K <sup>-1</sup>
Density of solids, $\rho_a, \rho_b$	7850 kg/m <sup>3</sup>
Specific heat of solids, $c_a, c_b$	470 J/(kg·K)
Heat conductivity of solids, $k_a, k_b$	46 W/(m·K)
Length of rounded corner area, $y_{sk}$	2 mm
Radius of rounded corner, $r_{end}$	1 m
Length of bush, $l_0$	13.28 mm
Equivalent radius of curvature, $r$	260 mm

$Y$ 方向上设置512个节点. 温度计算在最稠密的网格层上进行, 采用逐列扫描法<sup>[37]</sup>,  $Z$ 方向上共设置30个节点, 其中流体内部16个等距节点(含边界), 两固体内部各有7个非等距节点. 在收敛判据上, 压力和载荷的相对误差小于 $10^{-3}$ , 温度的相对误差小于 $10^{-4}$ . 计算过程中使用的参数列于表1中, 计算结果以有量纲方式呈现.

## 2 结果分析与讨论

### 2.1 速度滑移的影响

图4给出了速度滑移长度对 $X$ 方向润滑油流速的影响. 运动和静止表面的速度滑移长度从0.1  $\mu\text{m}$ 变化到2  $\mu\text{m}$ . 在不发生滑移的情况下, a表面( $Z=0$ )油的流速为2 m/s, b表面( $Z=1$ )油的流速为0. 油的流速在 $X$ 方向上变化显著, 受颈缩效应的影响, 在 $X=0.8$ 截面上接触区的间隙很小, 该位置油的流速相应增大. 在 $X=0$ 截面上, 流速沿 $Z$ 方向上的变化几乎是线性的. 滑移长度的增加对接触区内流速的影响明显. 随着a界面滑移长度  $l_{sa}$  的增加, 接触区内润滑油的流速明显降低. 其中 $X=0$ 截面的流速变化最明显. 当  $l_{sa}$  增大到2.0  $\mu\text{m}$  时, a表面 $X=0$ 处的油速会降至0.5 m/s. 这种变化甚至影响到了入口区的润滑油流速分布. 随着  $l_{sb}$  增加, 接触区内油的流速则出现明显增加. 当  $l_{sb}$  增大到2.0  $\mu\text{m}$  时, b表面 $X=0$ 处的油速增大到1.25 m/s, 但接触区之外的润滑油流速几乎不变.

图5给出了固体a表面速度滑移长度  $l_{sa}$  的增加对接触区压力、膜厚和温升的影响. 图中“ $Y=0$ ”表示计算

表 2 3~5层网格结果对比  
Table 2 Comparison among results with 3~5 grid levels

Parameters	3-level	4-level	5-level	$\Delta$	Error
$h_{min}/\mu\text{m}$	0.310 46	0.304 49	0.294 4	0.008 03	2.64%
$h_{cen}/\mu\text{m}$	1.028 73	1.022 18	1.004 49	0.012 12	1.19%
$p_{max}/\text{GPa}$	0.217 14	0.218 03	0.217 14	0	0.00%
$p_{cen}/\text{GPa}$	0.188 59	0.187 22	0.185 63	0.001 48	0.79%
$T_{max}/^{\circ}\text{C}$	41.972 84	39.947 81	38.454 52	1.759 16	4.40%
$T_{maxl}/^{\circ}\text{C}$	38.935 68	37.195 73	35.832 9	1.551 39	4.17%
$f$	0.011 025	0.012 2	0.013 265	0.001 12	9.18%

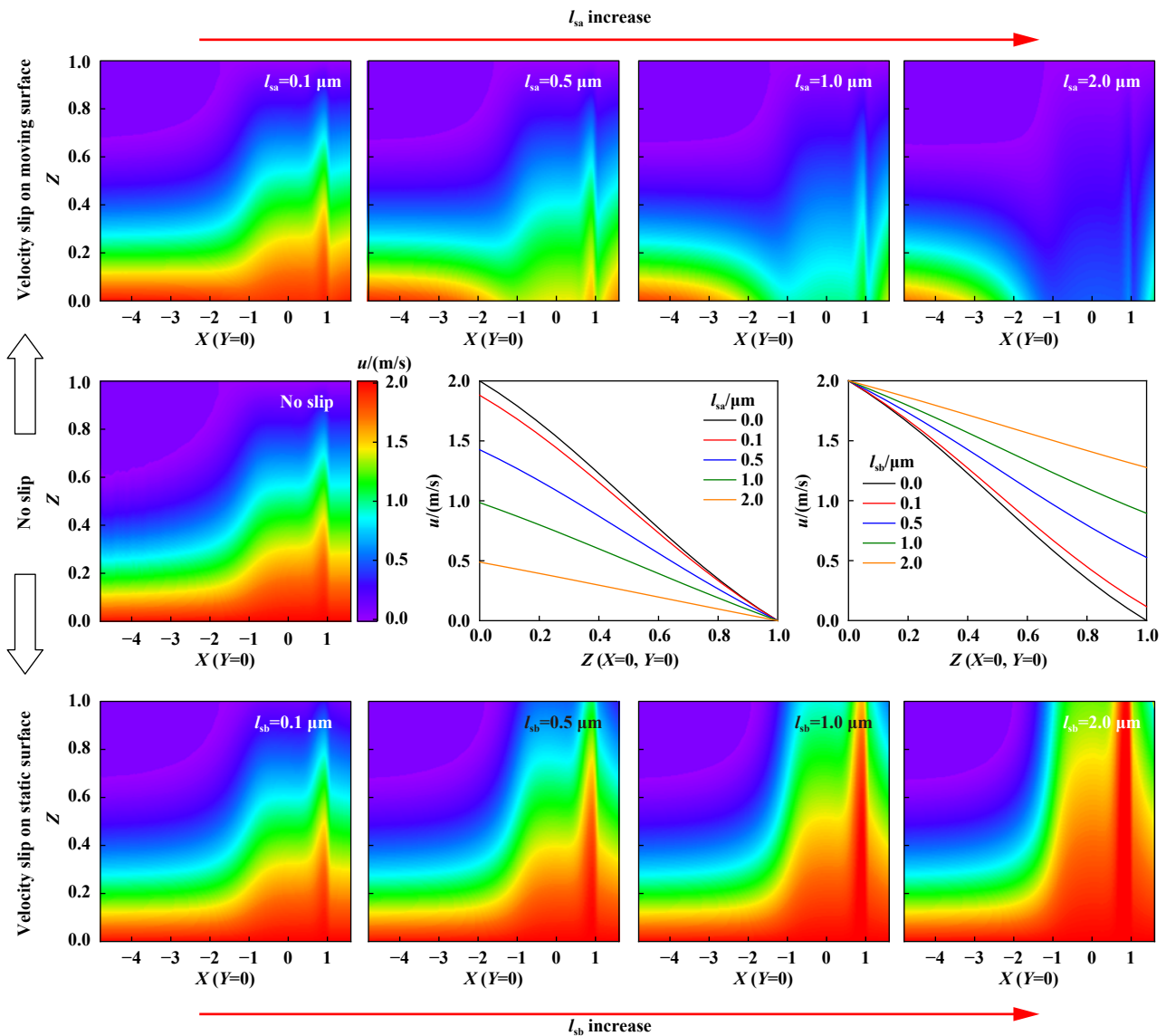
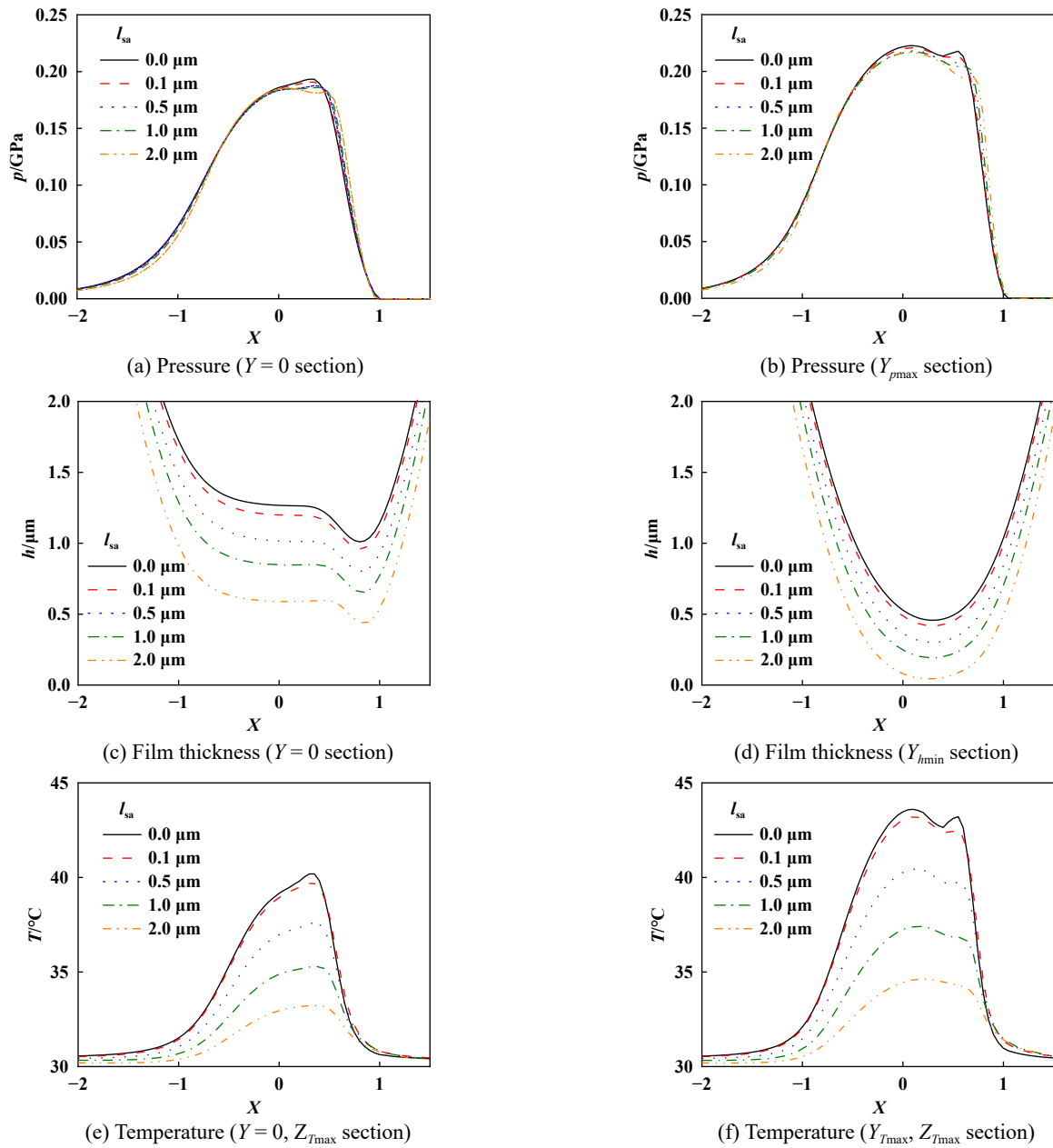


Fig. 4 Effect of velocity slip length on lubricant flow rate  
图 4 速度滑移长度对润滑油流速的影响

域的中截面; “ $Y_{pmax}$ ”指最大压力所在截面; “ $Y_{hmin}$ ”指最小膜厚所在截面; “ $Y_{Tmax}$ ”和“ $Z_{Tmax}$ ”分别指Y和Z方向上最大温升所在截面. 随着 $l_{sa}$ 从0.0增至2.0  $\mu\text{m}$ , 图5(a)和图5(b)中的压力峰高度降低, 第二压力峰向出口区

移动. 随着 $l_{sa}$ 的增加, 油膜厚度逐渐降低,  $Y=0$ 截面和 $Y_{hmin}$ 截面的膜厚变化都比较显著: 中心膜厚( $Y=0$ 界面)从1.25  $\mu\text{m}$ 降至0.6  $\mu\text{m}$ , 最小膜厚( $Y_{hmin}$ 截面)从0.5  $\mu\text{m}$ 降至0.05  $\mu\text{m}$ . 图5(e)和5(f)分别给出了在 $Y=0$ 截面上

Fig. 5 Effect of increase of  $l_{sa}$  on the lubrication state图 5  $l_{sa}$  增加对润滑状态的影响

最大温升所在油层的温升曲线, 和Y方向上最大温升所在截面的最大温升所在油层上的温升曲线. 润滑油流速的降低导致了2个截面内最大温升明显下降, 图5(f)中的最大温升从43.5  $^{\circ}\text{C}$ 降至34.5  $^{\circ}\text{C}$ .

图6给出了固体b表面速度滑移长度 $l_{sb}$ 的增加对接触区压力、膜厚和温升的影响.  $l_{sb}$ 增加的影响小于 $l_{sa}$ . 图6(a)中, 随着 $l_{sb}$ 从0.0增至2.0  $\mu\text{m}$ , 接触区的压力变化并不明显. 图6(c)和图6(d)中, 膜厚下降的幅度要明显小于图5. 图6(e)和图6(f)中最大温升的变化与图5差别很小, 随着界面b速度滑移的发生, 接触区最大温升从43.5  $^{\circ}\text{C}$ 降至36  $^{\circ}\text{C}$ .

## 2.2 温度滑移的影响

图7给出了界面a的温度滑移长度 $l_{Ta}$ 的增加对于接触区压力、膜厚和温升的影响,  $l_{Ta}$ 分别取值为0.0、0.1、0.5、1.0和2.0  $\mu\text{m}$ . 与图5和图6相比, 随着 $l_{Ta}$ 的增加, 接触区的压力、膜厚和温升仅略有下降, 降低的幅度均先快后慢. 自 $l_{Ta}$ 为0.5  $\mu\text{m}$ 开始, 压力曲线、膜厚曲线及温升曲线基本不发生变化, 说明运动表面的温度滑移影响较小.

图8所示为无滑移与界面a温度滑移长度 $l_{Ta}$ 分别等于0.1、0.5和2.0  $\mu\text{m}$ 条件下最大温升所在截面的温度等值线图. 如图8(a)所示, 在无滑移条件下, 接触区



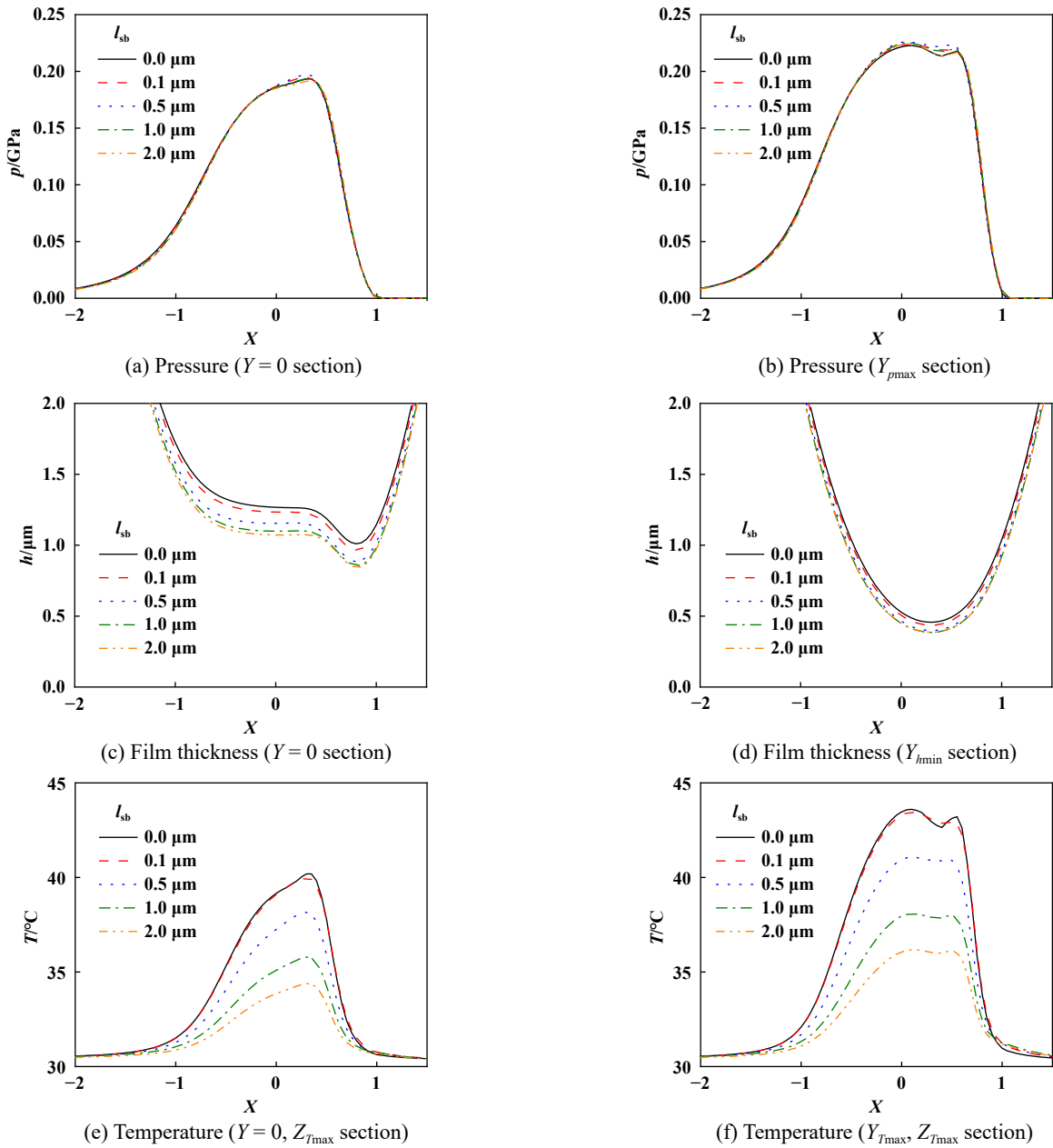


Fig. 6 Effect of increase of  $l_{sb}$  on the lubrication state

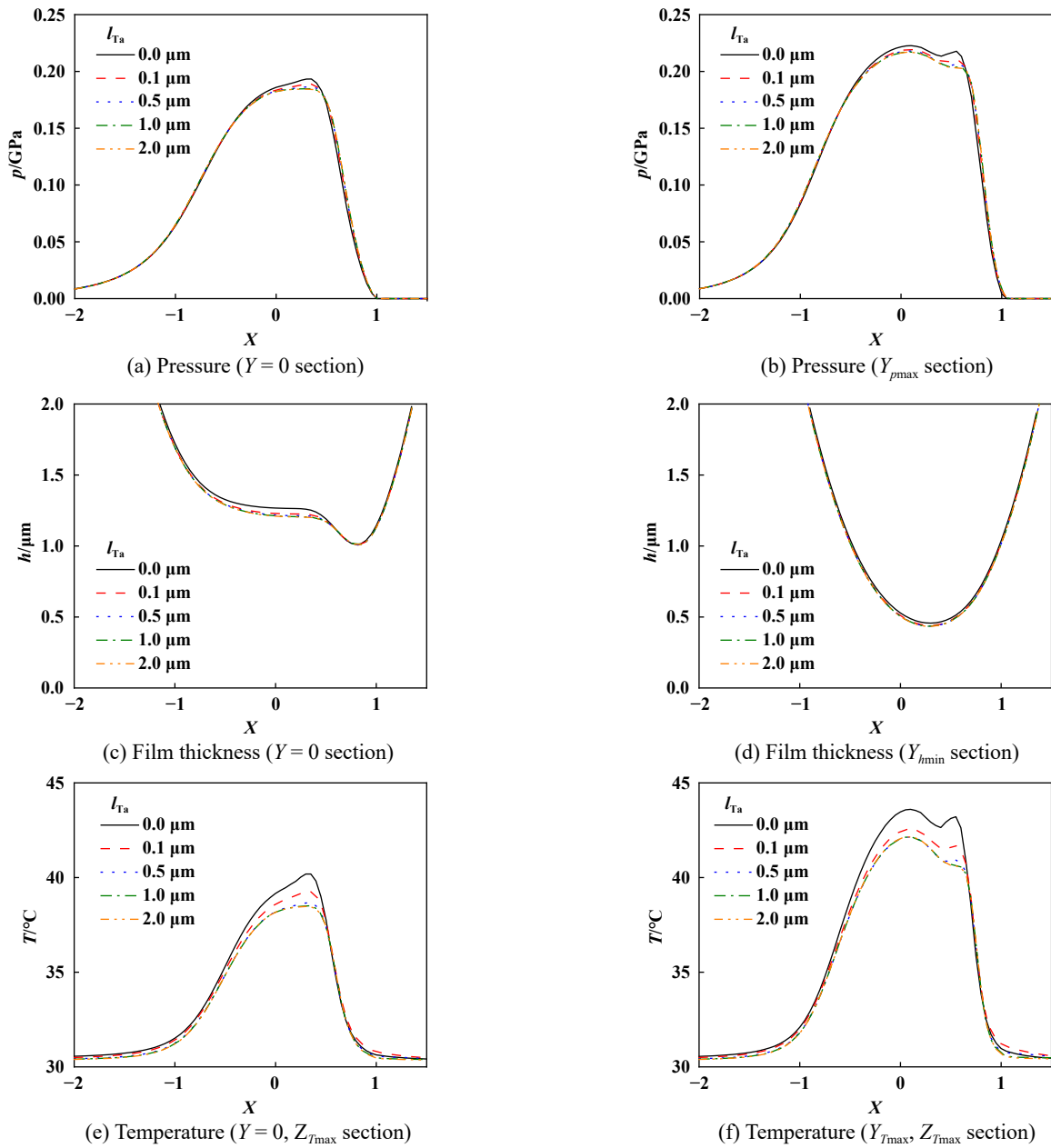
图 6  $l_{sb}$  增加对润滑状态的影响

最大温升出现在  $Z=0.5$  截面上,  $X=0$  截面上两界面处的温升均为  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$  左右. 随着  $l_{Tb}$  的增加,  $X=0$  截面上界面 a 的温升逐渐降低, 接触区最大温升也降低, 所在位置向固体 b 方向移动.

图 9 给出了界面 b 温度滑移长度增加对于接触区压力、膜厚和温升的影响.  $l_{Tb}$  分别取值为  $0.00$ 、 $0.01$ 、 $0.05$ 、 $0.50$  和  $2.00\text{ }\mu\text{m}$ . 随着  $l_{Tb}$  的增加, 接触区的压力和膜厚减小, 与图 8 中压力和膜厚变化类似. 在  $l_{Tb}$  超过  $0.05\text{ }\mu\text{m}$  后, 温度滑移  $l_{Tb}$  的增加对压力和膜厚不再起作用.  $l_{Tb}$  的增加对温升的变化作用非常明显. 随着  $l_{Tb}$  的增加, 如图 9(e) 和 9(f) 所示,  $Y=0$  截面上最大温

升所在油层的温度和整个接触区最大温升所在油层的温度均明显增加. 但  $l_{Tb}=0.50$  和  $2.00\text{ }\mu\text{m}$  的温升曲线差别已经很小.

图 10 给出了最大温升  $T_{max}$  所在截面的温度等值线图, 界面 b 温度滑移长度  $l_{Tb}$  分别等于  $0.00$ 、 $0.01$ 、 $0.05$  和  $2.00\text{ }\mu\text{m}$ . 在不发生滑移的情况下, 如图 10(a) 所示, 接触区最大温升仅为  $43.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . 当  $l_{Tb}$  增至  $0.01\text{ }\mu\text{m}$  时, 如图 10(b) 所示, 界面 b 的温度升至  $42\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 最大温升所在位置向界面 b 方向偏移, 接触区最大温升显著提高. 随着  $l_{Tb}$  增加至  $0.05\text{ }\mu\text{m}$ , 如图 10(c) 所示, 界面 b 的温度和最大温升继续增加. 在图 10(d) 中, 界面 b 的温度已经增加到  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,

Fig. 7 Effect of increase of  $l_{Ta}$  on the lubrication state图7  $l_{Ta}$ 的增加对润滑状态的影响

润滑油中最大温升达到55  $^\circ\text{C}$ , 位置非常靠近界面b. 同界面a发生的温度滑移会加强散热不同, 由于固体b静止, 界面b的温度滑移只会造成热量在界面b附近大量累积, 因此最大温升增加, 且所在的位置不断向界面b偏移.

### 2.3 速度的影响

图11给出了固体a速度增加对4种滑移模型下接触区润滑状态的影响, 滑移长度取固定值0.5  $\mu\text{m}$ . 图11(a)给出了接触区最大压力 $p_{max}$ 和中截面最大压力 $p_{max1}$ 的变化. 在不考虑滑移的情况下, 随着速度的增加, 接触区压力呈现出先减小后增加再减小的变化规律. 界面b速度滑移会导致最大压力增加, 而其他3种滑移会导致

压力减小. 当 $1 \text{ m/s} < u_a < 20 \text{ m/s}$ 时, 界面滑移对于压力的影响较为明显. 尤其当 $u_a=5 \text{ m/s}$ 时, 中截面最大压力 $p_{max1}$ , 界面b速度滑移的 $p_{max}$ 曲线都出现最大值. 图11(b)所示为中心膜厚和最小膜厚的变化. 随着速度的增加, 中心膜厚和最小膜厚均明显增加. 但相同速度下, 4种滑移都会导致膜厚在一定程度上减小, 这与文献[19-20]的结果一致. 当 $u_a \leq 3.5 \text{ m/s}$ 时, 界面a速度滑移对膜厚的影响最大, 当 $u_a > 3.5 \text{ m/s}$ 时, 界面b温度滑移对于膜厚的影响最大. 需要说明的是, 由于在 $u_a=0.2 \text{ m/s}$ 时的最小膜厚过小, 在考虑界面a速度滑移和界面b温度滑移时程序无法收敛, 所以这2种条件下

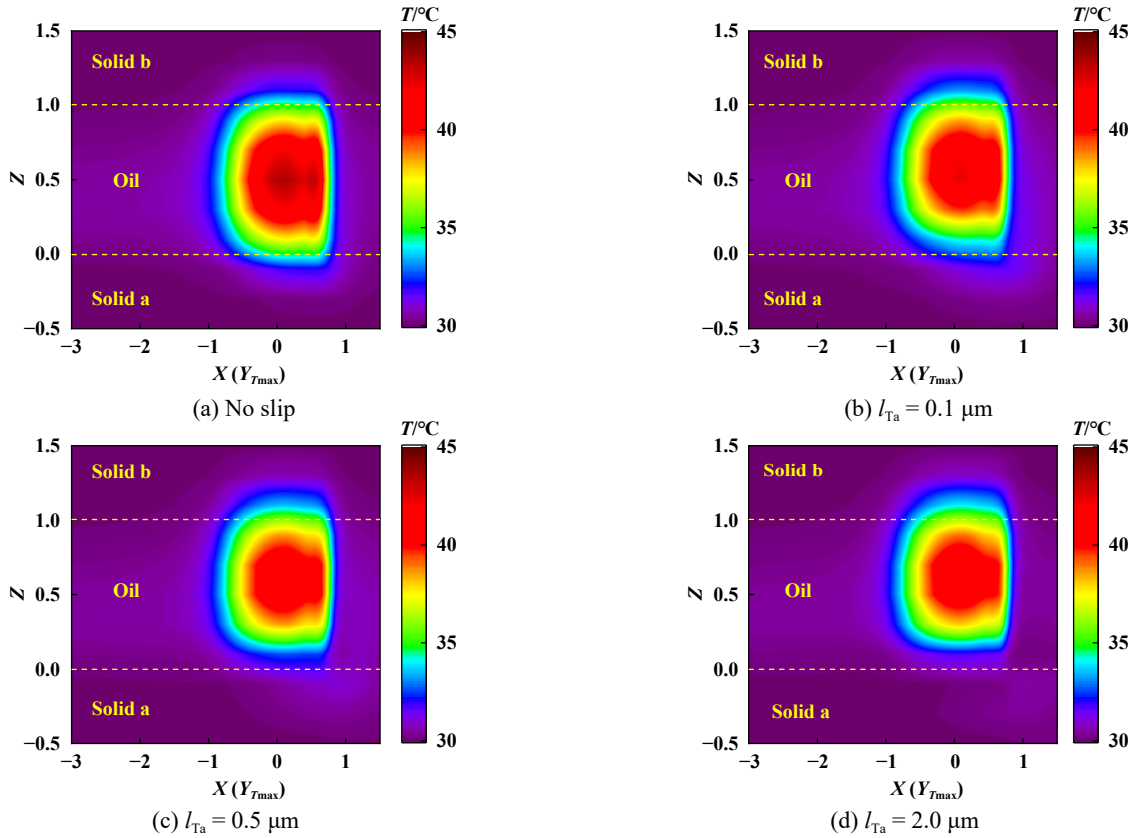


Fig. 8 Effect of  $l_{Ta}$  on the temperature rise of the maximum temperature rise section

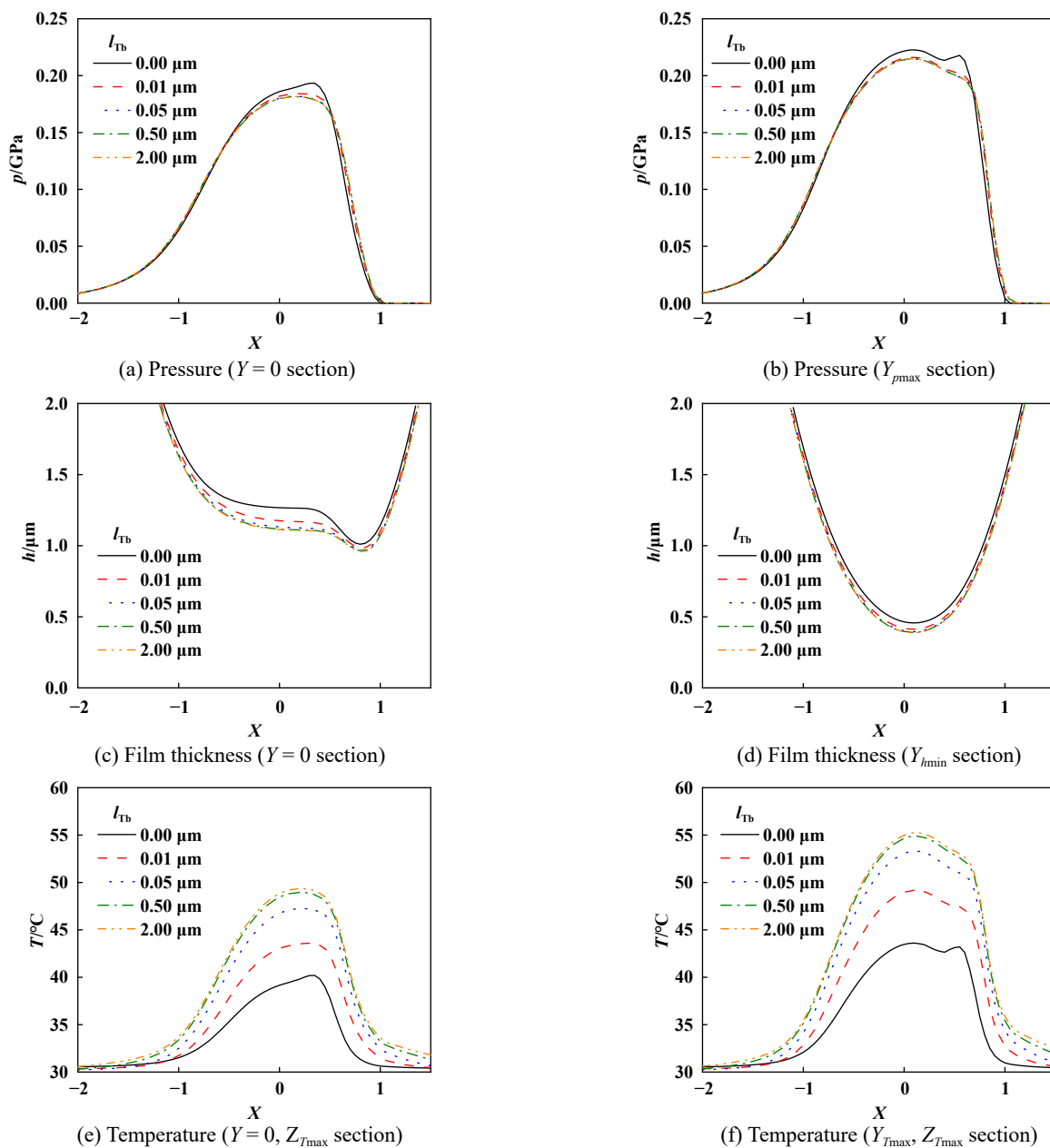
图 8  $l_{Ta}$ 对最大温升所在截面温度的影响

$u_a = 0.2$  m/s时的结果没有给出. 在图11(c)中给出了接触区最大温升 $T_{max}$ 和中截面最大温升 $T_{maxI}$ 的变化. 随着速度的增加, 接触区的温升逐渐增加. 但在相同速度条件下, 只有界面b温度滑移会导致接触区温升增大, 且速度越快, 界面b温度滑移对最大温升的影响越明显. 其他3种滑移模型都会造成最大温升的轻微变化, 其中静止表面的速度滑移造成接触区最大温升的局部微小升高, 其他温升则下降. 速度增加对摩擦系数的影响如图11(d)所示. 无滑移条件下, 随速度升高, 摩擦系数先升高后降低. 运动表面温度滑移条件下的摩擦系数曲线和无滑移条件下的形状相似, 数值略高. 运动和静止表面的速度滑移在 $u_a < 2$  m/s时会产生很小的摩擦系数, 二者的摩擦系数在 $u_a = 2$  m/s时达到各自的最大值(仍低于无滑移摩擦系数最大值)然后降低. 当 $u_a > 5$  m/s后, 运动表面速度滑移、温度滑移和静止表面速度滑移产生的摩擦系数差别已经不大. 界面b温度滑移所产生的摩擦系数曲线与前面3种模型均不相同. 当 $u_a = 0.5$  m/s, 其摩擦系数最大, 数值与无滑移条件下的摩擦系数接近. 随着速度的增加, 其摩擦系数逐渐下降, 在 $2 \text{ m/s} \leq u_a \leq 20 \text{ m/s}$ 范围内最小. 当 $u_a =$

$2 \text{ m/s}$ 即降到0.01以下. 当 $u_a = 20 \text{ m/s}$ 时, 摩擦系数已经降到了0.003 8. 图11(d)说明, 在中低速条件下, 运动表面发生速度滑移、静止表面发生速度滑移和温度滑移对降低摩擦系数有利; 在中高速条件下, 静止表面发生温度滑移对于降低摩擦系数和实现超滑有利.

### 2.4 滑移长度的影响

图12给出了4种滑移模型作用下, 随着滑移长度的增加, 接触区油膜特性的变化. 图12中的横向虚线代表无滑移时接触区的油膜特性参数, 用来对比. 图12(a)给出了接触区最大压力 $p_{max}$ 和中截面最大压力 $p_{maxI}$ 的变化. 考虑静止表面的速度滑移 $l_{sb}$ 下, 最大压力比无滑移条件下的大. 考虑静止表面的温度滑移, 最大压力最低. 这与图11(a)中的结果一致. 随着 $l_{sb}$ 的增加,  $p_{max}$ 和 $p_{maxI}$ 都是先增加后降低.  $l_{sa}$ 的增加会让 $p_{max}$ 先减小后增大, 但中截面最大压力 $p_{maxI}$ 是持续降低的. 随着 $l_{Ta}$ 和 $l_{Tb}$ 的增加,  $p_{max}$ 和 $p_{maxI}$ 持续降低, 其中 $l_{Tb}$ 的影响更明显. 如图12(b)所示, 4种滑移长度增加都会导致膜厚的持续降低, 但降低的幅度差别明显. 其中 $l_{sa}$ 对中心膜厚和最小膜厚的变化影响最大. 当 $l_{sa} = 2 \mu\text{m}$ , 最小膜厚已经由无滑移条件下的 $0.45 \mu\text{m}$ 降到 $0.04 \mu\text{m}$ .

Fig. 9 Effect of increase of  $l_{Tb}$  on the lubrication state图9  $l_{Tb}$ 增加对润滑状态的影响

相比之下, 静止表面 $l_{Tb}$ 的发生导致的膜厚降低最为平稳. 如图12(c)所示,  $l_{sa}$ 、 $l_{sb}$ 和 $l_{Ta}$ 的增加都会导致接触区最大温升的持续降低, 而 $l_{Tb}$ 则会导致接触区最大温升的显著提高. 如图12(d)所示,  $l_{Ta}$ 会导致接触区摩擦系数的增大, 这是由于温度越低, 油的黏度越高, 剪应力也就越大. 而 $l_{sa}$ 、 $l_{sb}$ 和 $l_{Tb}$ 的增加都会导致摩擦系数的降低. 随着 $l_{sa}$ 和 $l_{sb}$ 的增加, 摩擦系数都是以抛物线形式下降. 随 $l_{Tb}$ 的增加, 摩擦系数曲线则展现出不同的趋势, 变化较为缓和. 在 $l_{Tb} \leq 1 \mu\text{m}$ 条件下, 其摩擦系数最小. 当滑移距离为 $2 \mu\text{m}$ ,  $l_{sa}$ 和 $l_{sb}$ 条件下的摩擦系数也都降到0.01以下. 在无滑移条件下, 接触区的摩擦系数约

为0.0128; 在 $l_{sb} = 2 \mu\text{m}$ 时摩擦系数为0.007, 摩擦系数下降45%; 在 $l_{Tb} = 2 \mu\text{m}$ 时摩擦系数为0.009, 摩擦系数下降30%. 静止表面温度滑移长度在 $0.01 \mu\text{m} < l_{Tb} \leq 2 \mu\text{m}$ 的变化范围内, 摩擦系数均小于0.01, 即基本上实现了超滑. 在速度滑移发生的条件下, 当 $l_{sa}$ 和 $l_{sb}$ 达到 $2 \mu\text{m}$ 时摩擦系数才会降到0.01以下.

## 2.5 分析讨论

需要指出, 温度滑移的发生不会对接触区流场造成影响, 并且理论上温度滑移不会单独发生, 它伴随着速度滑移发生. 本文中只是为了解明温度滑移的影响, 所以建立了4种滑移模型, 分别讨论各自的影响.

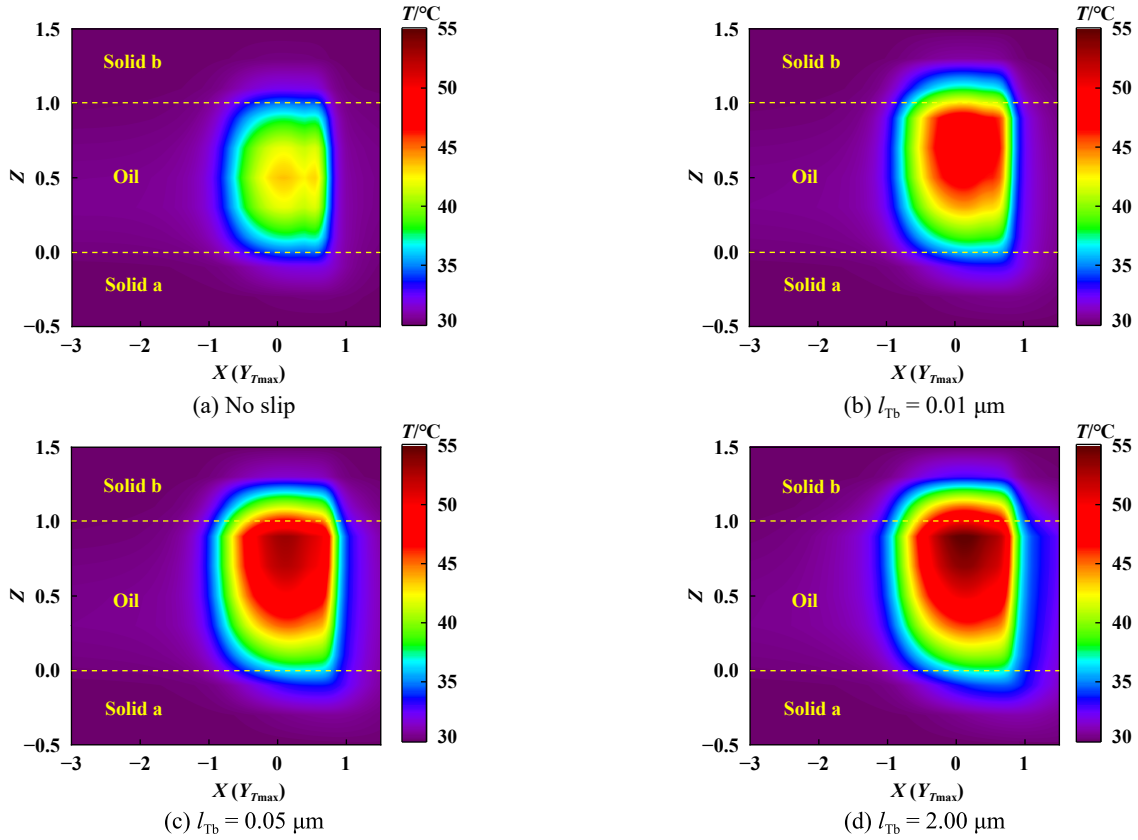


Fig. 10 Effect of  $l_{Tb}$  on the temperature rise of the maximum temperature rise section

图 10  $l_{Tb}$ 对最大温升所在截面温度的影响

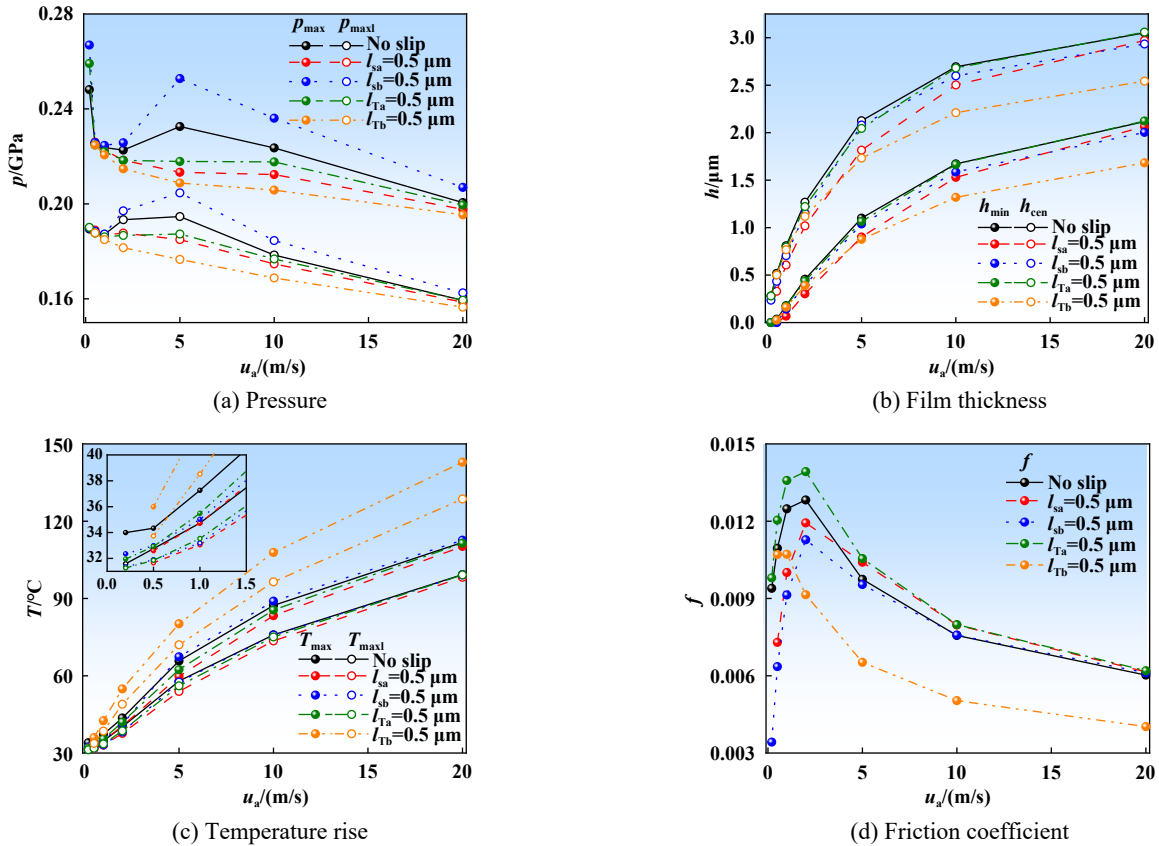


Fig. 11 The effect of speed increase on the lubrication state under 4 slip models

图 11 速度增加对4种滑移模型下润滑状态的影响



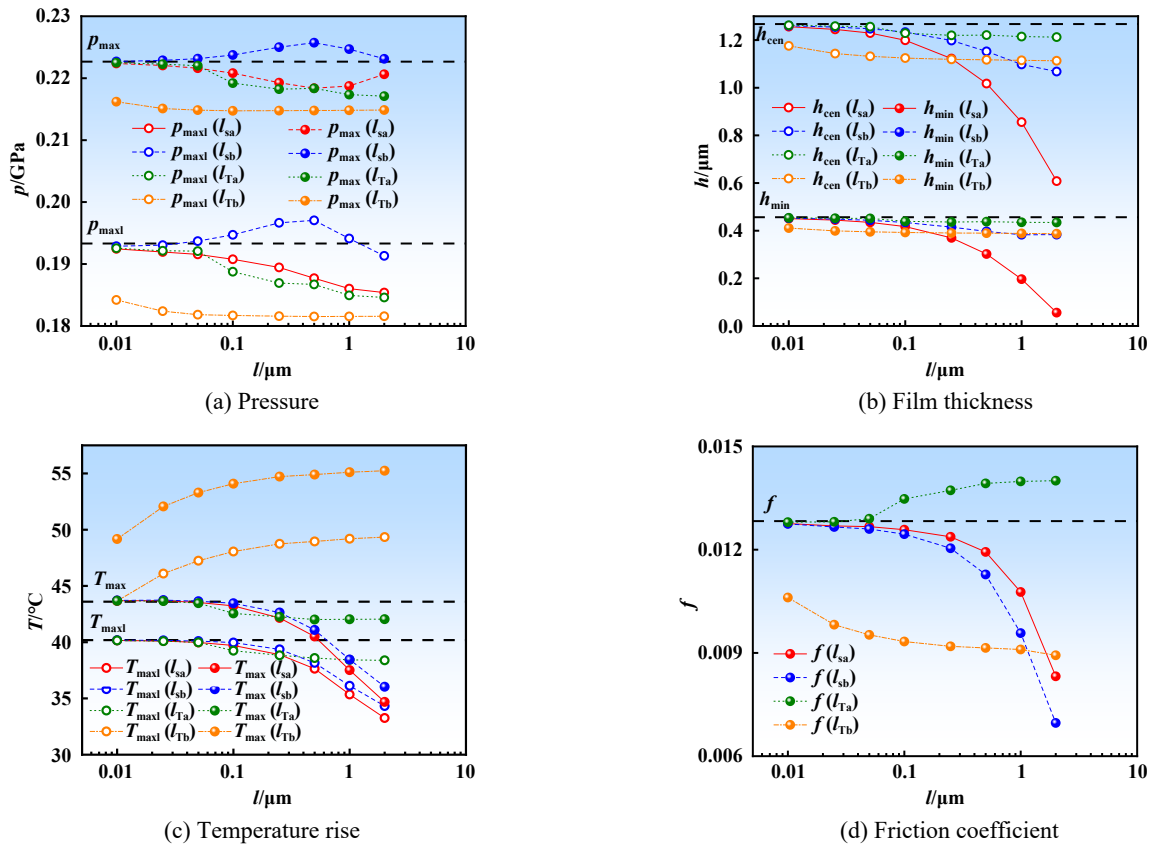


Fig. 12 The increase of slip lengths on the oil characteristics

图 12 滑移长度增加对润滑特性的影响

温度滑移对膜厚和压力的影响都很小, 主要影响温度分布进而影响摩擦系数。

由图11(d)和图12(d)可知, 通过界面滑移设计在油润滑接触副间实现摩擦系数的减小甚至超滑是存在理论上的可能的。界面a的温度滑移会增加接触区的摩擦系数。中低速条件下, 或者速度滑移长度增加到一定程度时, 运动表面和静止表面的速度滑移, 也有可能发生超滑。但在中高速条件下, 只有静止表面的温度滑移能够显著降低摩擦系数。但当滑移长度足够长, 运动表面的速度滑移会显著降低接触区的膜厚, 运动表面的温度滑移会导致接触区摩擦系数的增加。所以应当尽可能的避免在运动表面发生滑移, 并且静止表面发生滑移最有利于超滑的发生。

关于超滑的发生机理, 可以根据黏度和速度梯度的变化来考量。对于静止表面和运动表面的速度滑移来说, 改变了流速分布和降低了膜厚, 因此降低了膜厚方向的速度梯度  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ; 通过降低接触区最大温升而增加了润滑油黏度  $\eta$ 。但显然前者的影响更直接, 因此中低速条件下, 或者滑移长度足够长的时候, 摩擦系数得以下降。对于静止表面的温度滑移来说, 由于不

改变流速分布, 因此速度梯度  $\frac{\partial u}{\partial z}$  没有变化。摩擦系数的降低归因于温升导致的润滑油黏度  $\eta$  下降。

本文中滑移长度的取值范围参考了文献[24-25], 也希望将更多的可能性考虑在内。下一步作者将会组织相关试验, 以期得到滑移数据并推测出滑移长度的具体范围。实现滑移的方法可考虑使用表面能较低即疏水疏油的涂层材料。

### 3 结论

本研究在有限长线接触纯滑动热弹流润滑问题的数学模型基础上, 建立了4种界面滑移模型, 采用数值分析方法, 揭示了在运动和静止表面分别发生速度滑移或温度滑移时接触区润滑特性的变化规律, 并探讨了速度变化对界面滑移下接触区润滑状态的影响。主要结论如下:

a. 运动表面的速度滑移可明显降低接触区内润滑油流速, 静止表面速度滑移作用相反; 温度滑移的发生不会对接触区流场造成影响。

b. 4种滑移模型都会降低油膜厚度。运动表面的速度与温度滑移、静止表面的速度滑移都会降低最大

温升, 但静止表面温度滑移会显著提高最大温升。

c. 中低速条件下, 或者当速度滑移长度足够长, 运动和静止表面上的速度滑移都可以将摩擦系数降低到 0.01 以下, 实现超滑; 静止表面的温度滑移可平稳地降低摩擦系数实现超滑。

d. 运动表面的速度滑移会显著降低接触区的膜厚, 运动表面的温度滑移会导致接触区摩擦系数的增加, 建议避免在运动表面发生界面滑移。

e. 在低速条件下静止表面速度滑移起主要作用, 在高速条件下静止表面温度滑移起主要作用, 可借助静止表面的界面滑移来减小摩擦系数。

## 参考文献

- [1] Erdemir A, Martin J M. Superlubricity[M]. Elsevier, 2007.
- [2] Huang Xuanyu, Li Tengfei, Wang Jin, et al. Robust microscale structural superlubricity between graphite and nanostructured surface[J]. *Nature Communications*, 2023, 14: 2931. doi: [10.1038/s41467-023-38680-6](https://doi.org/10.1038/s41467-023-38680-6).
- [3] Liu Shuwei, Wang Huaping, Xu Qiang, et al. Robust microscale superlubricity under high contact pressure enabled by graphene-coated microsphere[J]. *Nature Communications*, 2017, 8: 14029. doi: [10.1038/ncomms14029](https://doi.org/10.1038/ncomms14029).
- [4] Androulidakis C, Koukaras E N, Paterakis G, et al. Tunable macroscale structural superlubricity in two-layer graphene via strain engineering[J]. *Nature Communications*, 2020, 11: 1595. doi: [10.1038/s41467-020-15446-y](https://doi.org/10.1038/s41467-020-15446-y).
- [5] Zheng Qingkai, Chhattal M, Bai Changning, et al. Superlubricity of PTFE triggered by green ionic liquids[J]. *Applied Surface Science*, 2023, 614: 156241. doi: [10.1016/j.apsusc.2022.156241](https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2022.156241).
- [6] Chen Huanyi, Cai Tao, Li Hua, et al. Macroscale superlubricity of steel by polymer-based ionic liquids without a running-in period[J]. *Tribology International*, 2023, 182: 108349. doi: [10.1016/j.triboint.2023.108349](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2023.108349).
- [7] Du Changhe, Yu Tongtong, Zhang Liqiang, et al. Robust and universal macroscale superlubricity with natural phytic acid solutions[J]. *Tribology International*, 2023, 183: 108387. doi: [10.1016/j.triboint.2023.108387](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2023.108387).
- [8] Sun Shouyi, Li Jianfeng, Li Jinjin, et al. Enhanced superlubricity on a-C films by lubrication with 3-hydroxypropionic acid[J]. *Carbon*, 2022, 199: 161–169. doi: [10.1016/j.carbon.2022.07.062](https://doi.org/10.1016/j.carbon.2022.07.062).
- [9] Sun Jingdong, Yang Shuyan, Wu Yang, et al. Comparative research on lubricating mechanism of surfaces grafted with hydrophilic and hydrophobic polymer brushes[J]. *Tribology*, 2024, 44(4): 519–529(in Chinese) [孙靖东, 杨淑燕, 吴杨, 等. 亲水、疏水聚合物刷水润滑机制的对比研究[J]. *摩擦学学报(中英文)*, 2024, 44(4): 519–529]. doi: [10.16078/j.tribology.2023024](https://doi.org/10.16078/j.tribology.2023024).
- [10] He Jinmei, Qu Mengnan. Fabrication and wear-resistance of abrasion-enhanced superhydrophobic materials[J]. *Tribology*, 2012, 32(3): 215–220 (in Chinese) [何金梅, 屈孟男. 磨损增强型超疏水材料的制备及性能研究[J]. *摩擦学学报*, 2012, 32(3): 215–220]. doi: [10.16078/j.tribology.2012.03.002](https://doi.org/10.16078/j.tribology.2012.03.002).
- [11] Wang Zhongqian, Wan Yong, Yang Shuyan, et al. Fabrication and tribological performance of hydrophobic films on the copper substrate[J]. *Tribology*, 2012, 32(1): 53–58 (in Chinese) [王中乾, 万勇, 杨淑燕, 等. 铜表面高疏水薄膜的制备及摩擦学性能的研究[J]. *摩擦学学报*, 2012, 32(1): 53–58]. doi: [10.16078/j.tribology.2012.01.010](https://doi.org/10.16078/j.tribology.2012.01.010).
- [12] Li Jing, Zhao Yanhui, Li Hong, et al. Fabrication of amphiphobic surface on aluminum via laser surface texturing[J]. *China Surface Engineering*, 2016, 29(3): 80–86 (in Chinese) [李晶, 赵言辉, 李红, 等. 激光表面织构铝基低黏附双疏表面[J]. *中国表面工程*, 2016, 29(3): 80–86]. doi: [10.11933/j.issn.1007-9289.2016.03.011](https://doi.org/10.11933/j.issn.1007-9289.2016.03.011).
- [13] Prony R. Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes[M]. Imprimerie impériale, 1804.
- [14] Girard P S. Memoire sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires[M]. Nabu Press, 1817.
- [15] Navier C. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides[J]. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 1823, 6(1823): 389–440.
- [16] Spikes H, Granick S. Equation for slip of simple liquids at smooth solid surfaces[J]. *Langmuir*, 2003, 19(12): 5065–5071. doi: [10.1021/la034123j](https://doi.org/10.1021/la034123j).
- [17] Sta'hl J, Jacobson B O. A lubricant model considering wall-slip in EHL line contacts[J]. *Journal of Tribology*, 2003, 125(3): 523–532. doi: [10.1115/1.1537750](https://doi.org/10.1115/1.1537750).
- [18] Zhao Y, Wong P L, Guo L. Linear complementarity solution of 2D boundary slip EHL contact[J]. *Tribology International*, 2020, 145: 106178. doi: [10.1016/j.triboint.2020.106178](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2020.106178).
- [19] Zhang Yaoguang, Wang Wenzhong, Liang He, et al. Layered oil slip model for investigation of film thickness behaviours at high speed conditions[J]. *Tribology International*, 2019, 131: 137–147. doi: [10.1016/j.triboint.2018.10.035](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.10.035).
- [20] Zhang Yaoguang, Wang Wenzhong, Liang He, et al. Slip status in lubricated point-contact based on layered oil slip lubrication model[J]. *Tribology International*, 2020, 144: 106104. doi: [10.1016/j.triboint.2019.106104](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2019.106104).
- [21] Nagayama G. Boundary conditions and microscale heat transfer at solid-liquid interface[J]. *Journal of the Heat Transfer*, 2011, 50: 29–36.
- [22] Chen Hongyao. Numerical analysis of thermal ehl problems considering boundary slippage under simple sliding condition[D]. Qingdao: Qingdao Tehcnology University, 2018 (in Chinese) [陈宏耀. 考虑边界滑移的纯滑动热弹流问题的数值分析[D]. 青岛: 青岛理工大学, 2018].
- [23] Yang Peiran, Wen Shizhu. A generalized Reynolds equation for non-newtonian thermal elastohydrodynamic lubrication[J]. *Journal of Tribology*, 1990, 112(4): 631–636. doi: [10.1115/1.2920308](https://doi.org/10.1115/1.2920308).

- [24] Meng Xianghua, Wang Jing, Nishikawa H, et al. Effects of boundary slips on thermal elastohydrodynamic lubrication under pure rolling and opposite sliding contacts[J]. *Tribology International*, 2021, 155: 106801. doi: [10.1016/j.triboint.2020.106801](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2020.106801).
- [25] Meng Xianghua, Wang Jing, Nagayama G. Boundary slip-induced temperature rise and film thickness reduction under sliding/rolling contact in thermal elastohydrodynamic lubrication[J]. *Journal of Tribology*, 2022, 144(7): 071602. doi: [10.1115/1.4053180](https://doi.org/10.1115/1.4053180).
- [26] Guo F, Wong P L, Geng M, et al. Occurrence of wall slip in elastohydrodynamic lubrication contacts[J]. *Tribology Letters*, 2009, 34(2): 103–111. doi: [10.1007/s11249-009-9414-x](https://doi.org/10.1007/s11249-009-9414-x).
- [27] Wong P L, Zhao Y, Mao J. Facilitating effective hydrodynamic lubrication for zero-entrainment-velocity contacts based on boundary slip mechanism[J]. *Tribology International*, 2018, 128: 89–95. doi: [10.1016/j.triboint.2018.07.017](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.07.017).
- [28] Li X M, Guo F, Wong P L. Study of boundary slippage using movement of a post-impact EHL dimple under conditions of pure sliding and zero entrainment velocity[J]. *Tribology Letters*, 2011, 44(2): 159. doi: [10.1007/s11249-011-9834-2](https://doi.org/10.1007/s11249-011-9834-2).
- [29] Ge Xiangyu, Chai Zhiyuan, Shi Qiuyu, et al. Superlubricity mechanisms of graphene oxide-ionic liquid solution at metal interfaces[J]. *Tribology*, 2023, 43(3): 263–273 (in Chinese) [葛翔宇, 柴志远, 石秋雨, 等. 氧化石墨烯-离子液体溶液在金属界面的超滑机理研究[J]. *摩擦学学报*, 2023, 43(3): 263–273]. doi: [10.16078/j.tribology.2021293](https://doi.org/10.16078/j.tribology.2021293).
- [30] Ouyang Tiancheng, Huang Haozhong, Zhou Xiaorong, et al. A finite line contact tribo-dynamic model of a spur gear pair[J]. *Tribology International*, 2018, 119: 753–765. doi: [10.1016/j.triboint.2017.12.010](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2017.12.010).
- [31] Shirzadegan M, Almqvist A, Larsson R. Fully coupled EHL model for simulation of finite length line cam-roller follower contacts[J]. *Tribology International*, 2016, 103: 584–598. doi: [10.1016/j.triboint.2016.08.017](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.08.017).
- [32] Hultqvist T, Shirzadegan M, Vrecek A, et al. Elastohydrodynamic lubrication for the finite line contact under transient loading conditions[J]. *Tribology International*, 2018, 127: 489–499. doi: [10.1016/j.triboint.2018.06.035](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.06.035).
- [33] Zhang Mingyu, Wang Jing, Yang Peiran, et al. A thermal EHL investigation for size effect of finite line contact on bush-pin hinge pairs in industrial chains[J]. *Industrial Lubrication and Tribology*, 2020, 72(5): 695–701. doi: [10.1108/ilt-10-2019-0448](https://doi.org/10.1108/ilt-10-2019-0448).
- [34] Zhang Mingyu, Wang Jing, Yang Peiran, et al. Improvement of thermal EHL by selecting bush-pin geometry based on an investigation for industrial chains[J]. *Industrial Lubrication and Tribology*, 2021, 73(2): 358–365. doi: [10.1108/ilt-01-2020-0031](https://doi.org/10.1108/ilt-01-2020-0031).
- [35] Zhang Mingyu, Wang Jing, Venner C H, et al. A thermal EHL investigation for finite line contact under starved condition on bush-pin hinge pairs in industrial chains[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2023, 237(5): 1119–1132. doi: [10.1177/13506501221143071](https://doi.org/10.1177/13506501221143071).
- [36] Zhang Ansheng, Wang Jing, Han Yiming, et al. Effect of pin generatrix on the elastohydrodynamic lubrication performance of pin-bush pair in industrial roller chains[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2022, 236(8): 1545–1553. doi: [10.1177/13506501211065954](https://doi.org/10.1177/13506501211065954).
- [37] Yang Peiran. Numerical analysis of fluid lubrication[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1998 (in Chinese) [杨沛然. 流体润滑数值分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998].
- [38] Venner C H, Lubrecht A A. Multilevel methods in lubrication[M]. Amsterdam: Elsevier, 2000.